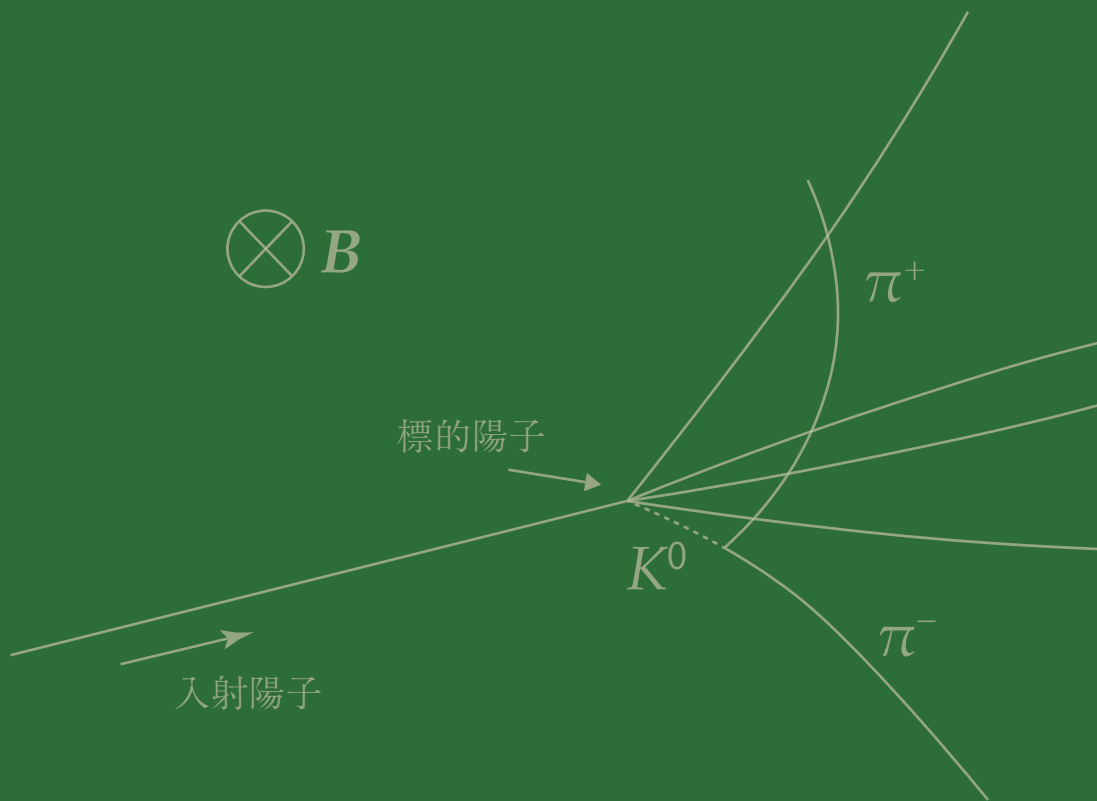


素粒子読本

READING IN ELEMENTARY PARTICLES



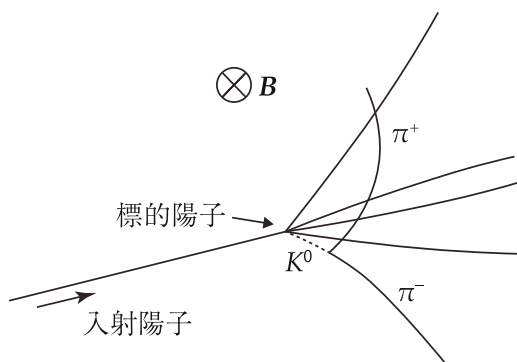
樋口 正人

小林 悌二・齋藤 暁 編

やまなみ書房

素粒子読本


READING IN ELEMENTARY PARTICLES



樋口 正人

Masato Higuchi

小林 悌二・齋藤 暁 編

 やまなみ書房

表紙の図版について

この模式図は KEK 1 m 水素泡箱に、高速陽子を入射し、ターゲットは液体水素の陽子で、3 視野撮影されたものの 1 枚である。図の表から裏へ磁場がかけられていて、飛跡粒子の運動量がわかる。泡箱解析は著者が熱心に取り組んだ実験の一つで、素粒子実験の当時最先端の技術が駆使され、様々な発見がもたらされた。

(本文 137 頁より)

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

はじめに

素粒子物理学の歴史は、新しい思考と発見の歴史であった。「素」のものを求めて、ギリシア時代に端を発する原子の考え方や、トムソンによる電子の発見、湯川秀樹の中間子論の展開、リヒター・ティンなどによる新粒子ジェイ・ブサイの発見など枚挙に暇がなく、歴史的には膨大な事項の蓄積がある。

本書では、数式は最小限とし、可能な限り言葉による説明を試みた。また、歴史上の事項の解説にページをさき、多少話題が古くなった部分もあるが、素粒子・高エネルギーに関心をもつものにとっては教訓的なものを含んでいるので、そのまま残した。

素粒子に関する話題は、大型加速器の稼動に伴い、事欠かない時代になってきた。2008 年 9 月に稼動を開始した CERN の大型ハドロン衝突型加速器 LHC での成果が待たれる。この加速器では、現在広く受け入れられている標準理論の検証、宇宙の初期に粒子に質量を与えたといわれるヒッグス粒子の発見^{*1}とその波及効果、対称性から存在を予言されている超対称粒子の発見、強い力・電磁力・弱い力を統一的に説明できる超対称大統一理論の片鱗なりとも見えてこないかなどなど、その成果が大いに期待される。

本書の構成は、前半（基礎的事項）と後半（多少専門的事項）に

*1 補遺：その後 2012 年 7 月にヒッグス粒子は LHC で発見された。

分けられている。

前半の内容

1. 物は何からできているか
2. 素粒子たちは力をおよぼし合う
3. 素粒子を分類する
4. 相対論のはじめ
5. 続相対論的・量子論的粒子
6. 素粒子の世界を探るには
7. 粒子の加速
8. マクスウェル方程式の美しさ
9. ディラック方程式を解く

後半の内容

10. C, P, T 変換の対称性
11. クォーク 仮想から実在へ
12. 新世代のクォークと実験的検証
13. 負エネルギー粒子
14. 回転運動とスピン
15. ゲージ変換とは
16. 標準理論（電弱統一理論）
17. 標準理論に続くもの

本書成立の経緯について

本書は素粒子物理学を専門とする著者樋口正人氏が、大学における長年にわたる研究を背景とした講義、セミナー、講話をもとに、素粒子物理学の世界を、その基礎から現在の問題までの広範な話題について関連分野の発展と必然的關係に丁寧に触れながら非常に読みやすい形に構成して著したものである。

素粒子物理の発展の歴史、基礎となる数学、電磁気学、相対論、原子・原子核物理学などを基礎の準備内容として解説しながら、理論分野と実験分野の絡み合いについて丁寧に触れて、素粒子世界の理解に寄与してきた数多くの新概念の登場についてそのいきさつ、意味、果たして来た役割を詳しく記述している本書は、この分野の勉強、研究にこれから入ろうとする人にとって、素粒子世界理解の流れを概観し、その概要の把握が無理なくできるもってこいの内容と組み立てになっている。さらに、この分野に進んだ人にとってもその発展の流れを振り返って整理してみる上で大変有効な内容になっている。

著者は数年かけて本書の稿に取り組んでいたが、その間に病の兆しに出会い、それを押して鋭意完成に努めた。一応の完成に達した稿について、著者の取り組み努力を見てきた東北大学理学部物理学教室同期で、その後も物理および関連の諸問題で絶えず意見を交わし合ってきた荒川紘（元静岡大学）、小林悌二（元東北大学）、齋藤

曉（元東京都立大学）の3人で稿を实らせる今後の方法について相談し合った。

先ず稿の点検を始めたが程なく著者の病状が進み、直接著者に確認したい具体的な記述箇所の数々について既に口頭や筆談でのやり取りができず、我々は大きな悩みを抱いた。しかし、著者の出版を前提とした熱心な原稿準備の経緯を踏まえると、上記の特徴をもった本稿を是非とも早く世に出したいとの思いが募る一方で、著者の快復を祈りながら点検と編集の作業を進め、成書としての出版に必要な種々の手続きの検討を重ねてきた。

この作業において、物理学書としての記述細部の統一性の点検、膨大な式および図版に関する修正・補修・再構成を小林、齋藤の主分担の下で慎重に進め、全体的整合性には荒川の通察を得て、かつ著者との直接応答ができない中での進捗状況をご家族に伝え、了解を得ながら完成を目指した。

原稿の整備を2019年5月にほぼ終え、これをもって2014年来入院闘病中の著者を見舞う予定でいたところ、6月初めに容体が急変し、帰らぬ人となってしまった。預かった稿の最終形を手にとってももらえなくなった我々にとって返す返すも残念であった。

そこで成書化を急ぐこととし、具体的検討の中で幸い学術書刊行にユニークなアイデアを示しておられるやまなみ書房飯澤正登実氏に事情を説明し快諾を得ることができ、作業全般の労を引き受けていただき、度毎にいただいた貴重なアドバイスのもとで念願の本書の刊行に漕ぎつけることができたのである。

本稿完成には、素粒子実験結果の幾つかのグラフ図版を著者が原典論文からコピー引用し、稿上に掲載予定箇所を指定していたもの

について、その出典確認を素粒子実験でも著者と分野に近い東京都立大学物理学教室の汲田哲郎氏に依頼して、これを確定することができた。その作業を快く引き受けていただいた氏に感謝したい。また、本稿に当初なかった索引について作成の労をとっていただいた齋藤大吾氏に感謝したい。著者による直接の確認が得がたい状況下で推敲を行わざるを得なかった多くの補修・再構成箇所の責任は点検・編集を行った編者にある。

学友著者の冥福を祈りながら本書成立の経緯を記した。著者が元気だったころ、当時 FORTRAN カード時代だった東北大学大型計算機センターに大きなカードボックスを抱えて通い詰め、泡箱写真の解析プログラム作成に熱心に集中しており、時々その説明をしてくれた姿が今も思い出される。本書が多くの読者によって活用されるならば、念願していた著者の大きな喜びであり、かつ協力してきた我々もその喜びを分かち合えるものである。

2020 年 7 月 5 日

編者 小林 悌二
齋藤 暁

目次

はじめに i

本書成立の経緯について iii

第 1 章 物は何からできているか 1

§1.1 素粒子 1

§1.2 物の根源と大きさ 2

 §1.2.1 疑いなく存在するのは人間 3

 §1.2.2 ものの根源の変遷 4

§1.3 微小な世界 4

 §1.3.1 階層構造 4

 §1.3.2 細胞, 分子, 原子 5

 §1.3.3 原子核と電子 9

 §1.3.4 クォークとレプトン 11

§1.4 巨大な世界 14

§1.5 ものの最も根源となるものは 17

 §1.5.1 真空 18

第 2 章 素粒子たちは力をおよぼし合う	21
-----------------------------	-----------

§2.1 相互作用は 4 つある	21
§2.2 力, 場, 媒介粒子	24
§2.2.1 電気力	24
2.2.1.1 媒介粒子	26
2.2.1.2 重力	27
2.2.1.3 場と媒介粒子	27
§2.3 力はどこまで届くのだろうか	29
§2.4 電磁相互作用	33
§2.5 強い相互作用	36
§2.6 弱い相互作用	38
§2.7 重力	40
§2.8 反応の断面積	43
§2.9 極微の世界の単位は何だろう	46
§2.9.1 エネルギー	46
§2.9.2 質量	47
§2.9.3 運動量	48
§2.9.4 自然単位系	48

第 3 章 素粒子を分類する	50
-----------------------	-----------

§3.1 分類の仕方	50
§3.2 スピンは整数か半整数か	51

§3.3 粒子の役割はどうか	54
§3.3.1 力を媒介する粒子	55
§3.3.2 物質を形成する粒子	56
3.3.2.1 クォーク	56
3.3.2.2 レプトン	59
§3.3.3 クォーク組成によるハドロンの分類	61
§3.3.4 質量の起源となった粒子	63
§3.3.5 ゲージ原理	63
§3.3.6 質量はヒッグス機構とともに	64
3.3.6.1 カイラル対称性の破れ	68
3.3.6.2 物質の質量	70

第 4 章 相対論のはじめ	71
----------------------	-----------

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換	71
§4.1.1 ガリレイ変換	72
§4.1.2 真の変換は何であろうか	76
§4.1.3 アインシュタインの特殊相対性原理	76
§4.1.4 ローレンツ変換	77
§4.1.5 ローレンツ・フィッツジェラルドの短縮	82
§4.1.6 時間の遅れ	83
§4.2 4 元ベクトル	85
§4.2.1 斜交座標系	86
§4.2.2 世界線	87
§4.2.3 4 元ベクトルの成分	92

§4.2.4	4 元ベクトル	94
§4.3	4 元ベクトルのスカラー積	95
§4.3.1	スカラー積	96
§4.3.2	計量テンソル (metric tensor)	97
§4.4	運動量とエネルギー	99
<hr/>		
第 5 章	続相対論的・量子論的粒子	105
<hr/>		
§5.1	運動方程式	105
§5.1.1	相対論的運動方程式	105
§5.1.2	種々の物理量の関係	108
§5.1.3	量子論的運動方程式	112
§5.2	相対論的波動方程式	116
<hr/>		
第 6 章	素粒子の世界を探るには	118
<hr/>		
§6.1	素粒子の世界を探る	118
§6.1.1	高エネルギーの必要性	118
6.1.1.1	物質の分解	119
6.1.1.2	新粒子の生成	119
6.1.1.3	分解能の向上	122
§6.2	素粒子の検出	127
§6.2.1	荷電粒子	127
6.2.1.1	電離, 励起	128
6.2.1.2	チェレンコフ光	133
6.2.1.3	シャワー	134

§6.2.2 中性粒子	134
§6.3 素粒子を見る——測定器の種類	138
§6.3.1 (A) 電氣的な検出	139
§6.3.2 (B) 光による検出	139
§6.3.3 (C) 飛跡による検出	140

第 7 章 粒子の加速 **141**

§7.1 加速原理	141
§7.2 加速器の種類	145
§7.2.1 コッククロフト・ウォルトン (Cockcroft-Walton) 型	145
§7.2.2 ヴァンデグラフ (Van de Graaff) 型	146
7.2.2.1 タンデム・ヴァンデグラフ型	146
§7.2.3 サイクロトロン (Cyclotron)	147
7.2.3.1 ビーム集束	151
7.2.3.2 シンクロサイクロトロン (Synchro-cyclotron)	152
§7.2.4 ベータトロン (Betatron)	152
7.2.4.1 ベータトロン振動	153
§7.3 シンクロトロン (Synchrotron)	155
§7.3.1 概要	155
§7.3.2 位相安定の原理	157
§7.3.3 高周波加速	161
§7.3.4 強集束の原理	165
§7.4 線形加速器	167

§7.5 衝突型加速器	169
§7.5.1 ルミノシティ	172
第 8 章 マクスウェル方程式の美しさ	176
§8.1 いくつかのベクトル演算	176
§8.2 マクスウェル方程式	181
§8.3 ゲージの凍結	183
§8.3.1 クーロンゲージ (Coulomb gauge)	183
§8.3.2 ローレンツゲージ (Lorentz gauge)	186
§8.4 マクスウェル方程式の 4 元ポテンシャル表示	188
第 9 章 ディラック方程式を解く	191
§9.1 スピノル	191
§9.2 スピン行列	194
§9.3 ディラック方程式	195
§9.4 ディラック方程式の解	201
§9.4.1 静止状態の粒子	201
§9.4.2 ディラック方程式の一般解	205
第 10 章 C, P, T 変換の対称性	209
§10.1 物理法則の不変性	209
§10.2 CPT 定理	210

§11.1	坂田モデル	231
§11.2	クォークモデル	233
§11.2.1	クォークモデルの考え方	234
§11.2.2	群	235
11.2.2.1	回転群	235
11.2.2.2	ユニタリー群	241
§11.2.3	中間子族	243
11.2.3.1	桜井の考察	244
§11.2.4	重粒子族	246
§11.3	カラー (color) の SU(3)	252
§11.3.1	カラー荷	252
§11.3.2	相互作用の強さ	254
§11.3.3	カラーと強い相互作用	255
§11.3.4	シールド効果	259

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証 267

§12.1 第 2 世代, 第 3 世代のクォークの発見 . . .	267
§12.1.1 第 2 世代クォーク	268
12.1.1.1 背景 (あるとすれば)	270
12.1.1.2 J/Ψ の発見	271
12.1.1.3 なぜチャームであるか	274
§12.1.2 OZI 則 (大久保-ツバイク-飯塚規則)	275
§12.1.3 チャーム・クォークの質量とチャーモニウム	278
§12.2 b, t クォーク	281
§12.2.1 b クォーク	281
§12.2.2 t クォーク	282
§12.3 時間的光子による粒子発生	283
§12.4 電子・陽電子衝突反応におけるハドロン発生	286
§12.5 クォークとレプトンに第 4 世代はあるか .	292
§12.6 標準モデルによる計算	295
§12.6.1 R	295
§12.6.2 W, Z の質量	297
§12.6.3 世代 (generation) 数	298
12.6.3.1 加速器実験	298
12.6.3.2 その他の実験	301

第 13 章 負エネルギー粒子	304
§13.1 発端	304
§13.2 ディラックの空孔理論	306
§13.3 電荷密度, 電流密度	308
§13.4 負エネルギー状態	309
§13.5 反粒子を含むファインマン図	312
§13.6 反粒子のアイソスピン	315
§13.6.1 アイソスピン	315
§13.6.2 反粒子のアイソスピン	318
13.6.2.1 クォークの合成系	322
§13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか	322
第 14 章 回転運動とスピン	330
§14.1 軌道角運動量	330
§14.2 スピン	335
§14.3 角運動量の合成	338
§14.3.1 全角運動量	338
§14.3.2 二つの状態の合成	340
第 15 章 ゲージ変換とは	346
§15.1 不変性, 対称性	346

§15.2	ゲージ原理	348
§15.3	ラグランジアン	350
§15.4	電荷の保存	352
§15.5	局所ゲージ変換	354
§15.6	場と運動方程式	360
§15.7	$U(1)$ 対称性	362

第 16 章	標準理論 (電弱統一理論)	366
---------------	----------------------	------------

§16.1	標準理論の発展	366
§16.1.1	発端	366
§16.1.2	弱アイソスピン	367
§16.1.3	$U(1)_Y \otimes SU(2)_L$ とゲージボソン	368
§16.2	標準理論の粒子	371
§16.3	電弱統一理論 (標準理論)	373
§16.4	中性ゲージボソン	374
§16.5	対称性の破れ	376
§16.5.1	大域的対称性の破れ	376
16.5.1.1	あからさな対称性の破れ	377
16.5.1.2	自発的対称性の破れ	377
§16.5.2	ヒッグス機構	383
§16.5.3	質量 0 の粒子が質量をもつ例	386

第 17 章 標準理論に続くもの	391
-------------------------	------------

§17.1 大統一理論	391
§17.2 陽子は崩壊するか	393
§17.3 大統一エネルギー	395
§17.4 階層性の問題	397
§17.5 超対称性理論	399
§17.5.1 暗黒物質	401

索引	404
-----------	------------

用語索引	404
人名索引	413

談話目次

談話 1 物質の根源	18
談話 2 時空の関係	101
談話 3 ルミノシティの実用単位	174
談話 4 パリティの固有値	229

第 1 章

物は何からできているか

人類が地球上に出現して以来、人類は絶え間なく文明を発展させて来た。いつの時代でも、我々が常に抱き続けてきた問いとして「わたしもあなたも、あるいは無生物でも、世界中のすべてのものは、いったい何からつくられているか」がある。この問いかけに対して、物理学的な問題として扱ってみる。究極の物質からすべてのものが組み立てられて、そこに成り立っている法則が、形を変えながら森羅万象ことごとくをつかさどっている。この章では、ものの根源の変遷をたどり、素粒子から宇宙までを概観する。

1.1 素粒子

すべての物質は「素粒子」といわれる極微の要素から成り立っている。これに関して、これまでにわかったことをいくつかあげてみる。

最も基本の物質粒子は、6種類のクォークと6種類のレプトンであり、ついで、力を伝える粒子としてグルーオン、光子、ウィークボソン (W^+ , W^- , Z^0 の区別がある)、未発見の重力子^{*1}があり、さらに、宇宙のはじめに粒子に質量を与えた名残のものであるヒッグ

^{*1} その後 2015 年に重力波検出器 LIGO で検出された。

第 1 章 物は何からできているか

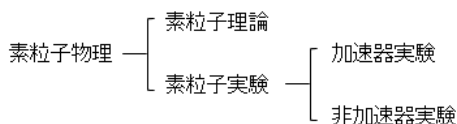


図 1.1: 素粒子物理学の分野

ス粒子がある。これらの素粒子で世界ができていて、それらは互いに力をおよぼしあっている。

素粒子を探求する方法には 2 つある。「素粒子理論」と「素粒子実験」である。湯川秀樹がパイ中間子にたどり着いたのは素粒子理論の立場からであり、チャームクォークを登場させたのは、加速器を使用した素粒子実験による。さらに、素粒子実験は、大型加速器を用いて高いエネルギー粒子の衝突反応から素粒子を明らかにしようとする高エネルギー物理学と、加速器を用いない非加速器実験の分野に分けられる。

非加速器実験では、日本の神岡鉱山で行われている陽子崩壊実験や、同じ神岡実験で、1982 年 2 月に超新星爆発からのニュートリノを検出した小柴昌俊たちの実験がある。このように、素粒子の理論と実験は、どちらかが先行することがあっても、相補いあって素粒子の姿を明らかにしつつある。

1.2 物の根源と大きさ

§1.2.1 疑いなく存在するのは人間

「われ思う、ゆえにわれあり (Cogito, ergo sum)」これはデカルトの「方法叙説」の中にでてくる有名な言葉である。デカルトの言葉は「われ思う」すなわち思考する主体であるわれがそこにあることを示し、「ゆえにわれあり」では、したがってそこで考えている自分がまぎれもなく厳然として存在することを述べている。存在している「われ」は、デカルトにあっては考えることが考える主体を定義している。

現代の我々にとっての精神は、頭脳という物質的な作用の結果であることを知っている。高度化した物心一体となったものを人間と規定すると、思考するもの、すなわち人間の存在そのものが明確化されている。その意味で「人間の存在」が確かなものであるといえる。このことは、地球外に我々人類以外の知性をもつものがあつたとすれば、その知的生物にもまた拡張されよう。

人間である我が存在し、その我が周りを見わたすと、自然界には実にさまざまなものが存在していることに気がつく。日常の目に見えるものから、光学顕微鏡や電子顕微鏡、各種粒子線による測定器によって明らかになった極微の世界があり、他方では、人工衛星・探査機、望遠鏡、X線・ γ 線・宇宙線などによる探査が地上で、あるいは宇宙空間で行われることにより姿を現した巨大な世界がある。そのスケールは、電子の大きさから宇宙の大きさまで、実に $10^{-18} \text{ m} \sim 10^{26} \text{ m}$ に及ぶ。

§1.2.2 ものの根源の変遷

命題「ものは何からできているか」に対する答えは、数多くの人々によって考えられてきた。古代ギリシア時代には、そのようなことを考えるのは哲学であり、その一人にタレス (BC640頃–546) がいた。タレスは万物の根源について考え、原始物質は水であるとした。万物は水から生じ、また水に戻っていくと考えた。アリストテレス (BC384–322) は物質が火、水、土、空気の 4 元素からできているとした。それは温、冷、湿、乾の実在する概念がもとになっている。これに対して物質の最小単位として、原子を考えたのがデモクリトス (BC400頃) であり、原子論を展開した。原子は物質の不可分な単位であり、空虚な空間をたえず運動するものとした。後世になってからドルトン (1766–1844) はある元素の原子は同じ大きさと質量をもち、その性質も同じであり、異なる元素は異なった原子からなるとした。また、元素記号も考案している。

次に、微小な世界と巨大な世界に別けて見てみよう。

1.3 微小な世界

はじめに微小な世界について概観してみよう。

§1.3.1 階層構造

出発点のスケールをほぼ 1 m の大きさである人間とする。微小な世界の概念を次に示すと、不連続な階層をなしていることがわかる。

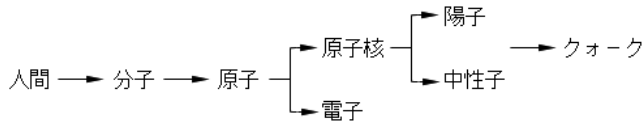


図 1.2: 微小な世界の階層構造

ある階層では、その階層特有な法則がある。たとえば、原子は不可分なもの、不変なものとして元素の周期表が成り立っているが、より下の段階では、質量不滅の法則さえも成り立たず、質量とエネルギーの関係を含めてエネルギーは不変であるというもので置き換わった。また、化学反応を理解するのに、宇宙空間で成り立つ法則、たとえばケプラーの法則などをもち出す必要はないし、原子核の構造などを議論する必要もない。化学反応では原子核の種類が変わることもない。化学反応では分子・原子の階層で成り立つ法則があり、宇宙空間には宇宙空間の、原子核には原子核の階層で成り立つ法則がある。このように、自然は階層構造をなして存在している。

§1.3.2 細胞，分子，原子

地球上には千差万別の動植物があり、さらに、これらは組織や細胞から成り立っている。細胞の大きさはさまざまで、人の卵細胞は約 $200\ \mu\text{m}$ 、ダチヨウの卵細胞は約 $10\ \text{cm}$ もあり、単細胞生物のゾウリムシは約 $200\ \mu\text{m}$ 、ブドウ状菌は約 $2\ \mu\text{m}$ 、ウイルスはおよそ $100\ \text{nm}$ である。ただしこれらの長さの単位は $1\ \text{m} = 10^6\ \mu\text{m} = 10^9\ \text{nm} = 10^{12}\ \text{pm} = 10^{15}\ \text{fm}$ の関係にある。複合物質である DNA や蛋白質などもそれらを作っているより小さな分子から成っている。分子は、それ以上分解すると物の性質ががらり

第 1 章 物は何からできているか

と変わってしまう限界の物質のことである。

たとえば水の分子は H_2O で、共有結合である O-H 間の距離は $0.957 \times 10^{-10} \text{ m}$ が 2 対、角 H-O-H は 104.5° であり、水分子の表面は図 1.3 に示すように酸素と水素のファンデルワールス半径（単独原子の半径） $1.4 \times 10^{-10} \text{ m}$ と $1.2 \times 10^{-10} \text{ m}$ の球の表面になり、水分子の大きさは $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ の球形に近い。

分子はさらに**原子**からなる。ヘリウム、ネオンなどの不活性気体は、一個の原子が分子となる。原子はよく太陽系にたとえられる。太陽に相当するのが原子核で、惑星に相当するのが電子である。

図 1.4 に炭素原子の模式図を示す。実際の原子の軌道半径は、軌道ごとに異なったものであるし、軌道もきれいなバラの花びら形をしているわけでもない。この図は、電子が 6 個あり、原子核の周りを回っているということを示しているのにすぎない。また、電子は惑星のようにある定まった軌道を描いているわけではない。電子の軌道は量子力学的なものであって、空間の位置は電子の存在確率で表され、最も確率の高いところが惑星の軌道に相当する。惑星に水星、金星、地球などがあるように、電子軌道にも内側から s, p, d, f, g などの名称がある。

すべての物質は原子から成り立ち、構成する原子によって物の性質が決まる。原子はある物質の性質を示す最後の砦である。それ以上分解するともはやその物質の性質は失われてしまう。

原子の種類が違えば特性の違いになり、特にこの特性の違いに着目したものが**元素**と呼ばれる。したがって、元素は化学で取り扱う要素になる。1869 年メンデレーエフによって、似た性質の元素が周期的に現れる事が発見され、でき上がった元素の表が**周期表**であ

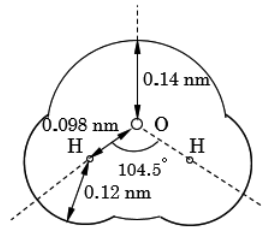


図 1.3: 水分子の成り立ち

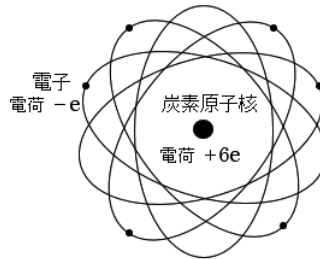


図 1.4: 炭素原子の模式図

る（図 1.5）。

これは、原子の電子配列に類似性があることに他ならない。たとえば 14 族の炭素，珪素，ゲルマニウムなどは原子の最外殻電子の個数がいずれも 4 個で，結晶を作るときには互いに 1 個ずつ電子を出し合って，合計 8 個で安定な共有結合をし，ダイヤモンド形の構造となる。単独の原子の最外殻電子の数が 4 個では不安定でこれが 8 個になると安定である。しかし，どこからか電子だけを補充することは負イオン化することで，これも不安定である。この故に，原子ごと引き寄せて互いに 1 個ずつの電子を出し合うという**共有結合**方式をとる。

第 1 章 物は何からできているか

族 周期	アルカリ 金属		希土類		チタン 族		土壌 金属		クロム族		マンガン 族		鉄族 および 白金族		銅族		亜鉛族		アルミ ニウム 族		炭素族		窒素族		酸素族		ハロゲン		希ガス								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18			5	6	7	8	9	10			2								
	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A					8		1B		2B	3B	4B	5B	6B	7B	0															
1		H																																	2		
2		Li	Be																																		
3		Na	Mg																																		
4		K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr																		
5		Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe																		
6		Cs	Ba	87-71 L- 系列	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn																		
7		Fr	Ra	89-103 A- 系列	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Uub	Uut	Uuq	Uup	Uuh	Uus	Uuo																		
				87-71 L- 系列	ランタ ノイド	57	La	Ce	Pr	60	Nd	Pm	62	Sm	63	Eu	Gd	Tb	Dy	67	Ho	68	Er	69	Tm	70	Yb	71	Lu								
				89-103 A- 系列	アクチ ノイド	89	Ac	Th	90	Pa	91	U	92	Np	93	Pu	94	Am	95	Cm	96	Bk	97	Cf	98	Es	99	Fm	100	101	Md	102	No	103	Lr		

図 1.5: 元素の周期表

原子の結合の仕方には、共有結合のほかに**イオン結合**がある。原子がそれぞれ正イオン化と負イオン化したものが引き合ってイオン結合を形成する。たとえば食塩 (NaCl) の結晶がある。1 個ずつの正のナトリウムイオンと負の塩素イオンとが引き合って塩化ナトリウム (食塩) になる。このときのナトリウムと塩素原子の距離は $2.82 \times 10^{-10} \text{ m}$ である。

ヘリウムやネオン、アルゴンなどの希ガス類は、いずれも化合物を作らず不活性である。また、中性原子は、正・負の電荷がバランスすることから陽子と電子の個数が同じである。

表 1.1: 核子

核子	記号	荷電 (e)	質量 (MeV/c^2)	スピン (\hbar)	寿命 (s)
陽子	p	1	938.27	1/2	安定
中性子	n	0	939.57	1/2	886.7

§1.3.3 原子核と電子

原子は**原子核**と**電子**からなる。原子核は正の電荷をもち、電子は負の電荷をもつ。通常の原子は電氣的に中性である。電気素量を $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とすると、電子の電荷は $-e$ である。電子の大きさは**点状粒子**といわれ、その上限しかわかっていない。現在のところ電子の大きさの上限値は 10^{-18} m である。これに対して原子核には大きさがあり、**陽子**（プロトン、 p と表記：正電荷 e をもつ）と**中性子**（ニュートロン、 n と表記：電荷はもたない）から成り立っていて、陽子・中性子は原子核を作っている粒子なので、2 つをまとめて**核子**という。表 1.1 にこれを示す。

表中の質量、スピンの単位については後述する。また、素粒子が壊れて他の粒子になるときの寿命は、陽子が安定で平均寿命 τ_p が 10^{33} 年以上という実験値があり（詳細は §17.2 で述べる）、中性子の平均寿命は約 15 分ほどで壊れて陽子、電子、反電子ニュートリノという粒子になる。

陽子・中性子の個数は、原子核の種類によってある定まった数となっている。陽子と中性子の数の合計を質量数という。

たとえば、通常の炭素の原子核は、6 個の陽子と 6 個の中性子（質量数 A が 12）から成り立っている。同じ炭素でも年代測定に用

第 1 章 物は何からできているか

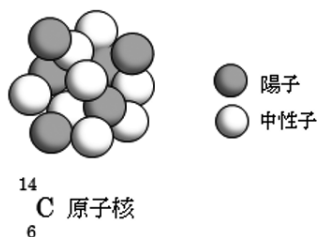


図 1.6: 炭素 14 原子：陽子 6 個と中性子 8 個からできている。

いるものは炭素の同位体といわれ、6 個の陽子と 8 個の中性子（質量数 A は 14）から成り立っている。これらを $^{12}_6\text{C}$, $^{14}_6\text{C}$ と表す。すなわち、質量数 A と原子番号 Z ，元素記号 X で A_ZX と表記する。図 1.6 に $^{14}_6\text{C}$ 原子核を示す。

中性子の個数は $N = A - Z$ である。

原子核の半径 R は $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ として

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (1.1)$$

と表される。原子核半径は、質量数の大きなもので 10^{-14} m 程度である。水素の原子核が陽子であるから、陽子の半径はほぼ 10^{-15} m となる。中性子も同程度の大きさである。

原子番号 Z の原子核は Ze の荷電をもち、まわりを周回している Z 個の電子の電荷 $-Ze$ とつり合って中性になっている。原子核が Ze の荷電を帯びているのは内部の陽子が Z 個含まれているためである。

まとめれば、物質を作っている電子は点状粒子である一方、陽子・中性子には大きさがあって、その半径はほぼ 10^{-15} m であり、

原子核の大きさは $10^{-15} \text{ m} \sim 10^{-14} \text{ m}$ である。

§1.3.4 クォークとレプトン

陽子・中性子に大きさがあることから、これらはもっと小さな物質からできていることが推察できる。それが 1964 年ゲルマンとツバイクによって提唱された**クォーク**であり、高エネルギー実験で実在が確かめられた。クォークは現在のところ 6 種類あり u, d, c, s, t, b **クォーク**と呼ばれる。これらの名称はそれぞれアップ、ダウン、チャーム、ストレンジ、トップ、ボトムに由来する。また、クォークの電荷は u, c, t クォークが $\frac{2}{3}e$ 、 d, s, b クォークが $-\frac{1}{3}e$ であり、整数値でない半端な電荷をもっている。クォークは電子と同様に、現状では点状粒子である。

6 種類のうち任意の 3 個のクォークでできている複合粒子を**重粒子**（バリオン）という。重粒子は強い相互作用をする**ハドロ**ンといわれるものの仲間である。ハドロンの語意は、強い相互作用をする粒子であり、クォークで構成されている粒子である。クォークのように現段階では一番もととなる粒子を**素粒子**という。我々の世界は粒子の世界であるが、素粒子には必ず**反粒子**といわれるものが存在する。粒子がもっている符号付の量に対して、反粒子の同じ量は、等量であるが異符号である。たとえば、粒子である u クォークの電荷は $\frac{2}{3}e$ であるが、反粒子の反 u クォーク（表記法は粒子の記号の上に横棒をつけて \bar{u} と表す）の電荷は $-\frac{2}{3}e$ である。クォークを q とすれば反クォークは \bar{q} と表す。

重粒子は任意の 3 つのクォークからなり (qqq) の構造をもつ。これに対して反重粒子は ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) の構造をもつ（図 1.7）。

第 1 章 物は何からできているか



図 1.7: ハドロンのクォーク組成。－付きは反クォークを表す。

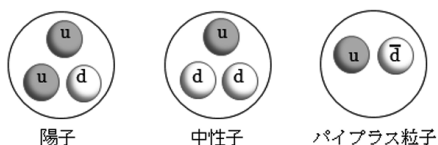


図 1.8: 陽子，中性子， π^+ 中間子のクォーク組成

ハドロンにはもう一つのグループがあり、1935 年に湯川が予言した π (パイ) 中間子を含む**中間子** (メソン) である。中間子はクォークと反クォークからなり ($q\bar{q}$) の組成をしている (図 1.7)。 π^+ (パイプラス) 中間子は ($u\bar{d}$) であり、 π^- (パイマイナス) 中間子は ($d\bar{u}$) である。すでに登場した核子のうち陽子のクォーク組成は (uud) であり、中性子は (udd) である (図 1.8)。

自然界をつくっている究極の物質の一つがクォークであることを述べたが、さらに、もう 1 種類の究極物質がある。それはすでに登場した電子およびその仲間のことであり、これらの粒子は本質的には「弱い相互作用」をする。

ニュートリノは電荷ももたず、質量も上限しかわかっていない粒子である^{*2}。それでは何の相互作用もしないかというそうではなく、極わずかの相互作用をする。ニュートリノと測定器との相互作用

^{*2} §3.3.2 の脚注参照。

用があり、その存在が確かめられた。ニュートリノは電子とともに弱い相互作用をする（電子は電荷をもつので電磁相互作用もする）。電荷による相互作用を除いて弱い相互作用のみをする一群の粒子を**レプトン**という（もともとは軽粒子の意味であるが現在では「レプトン」とよぶ）。

レプトンはクォークと同様に 6 種類ある。 $-e$ の電荷をもつ**電子**、**ミュー粒子**（ミューオン）、**タウ粒子**（タウオン）の 3 種類 (e^- , μ^- , τ^-) と、これらの粒子に対応して電荷がゼロの**電子ニュートリノ**、**ミューニュートリノ**、**タウニュートリノ**の 3 種類 (ν_e , ν_μ , ν_τ) があり、**荷電レプトン**と対になり合計 6 種類である。レプトンは点状粒子と考えられる。また、これらには**反粒子**が存在する。電子に対しては陽電子 (e^+ と表記)、電子ニュートリノに対しては反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) などがある。荷電レプトンの反粒子は (e^+ , μ^+ , τ^+) であり、反ニュートリノは ($\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$) である。

こうして物質をつくっている究極の粒子は、現在のところ、クォークとレプトンになる。**クォークとレプトン**は 4 種類の力にあずかる。それは強い順に、**強い力**、**電磁気力**、**弱い力**、**重力**になる。

クォークとレプトンとは異なるが**媒介粒子**と称する粒子がある。強い力、電磁気力、弱い力、重力を運び媒介する役割の粒子で、この順に**グルーオン**、**光子**、**ウィークボソン**、**重力子**である。

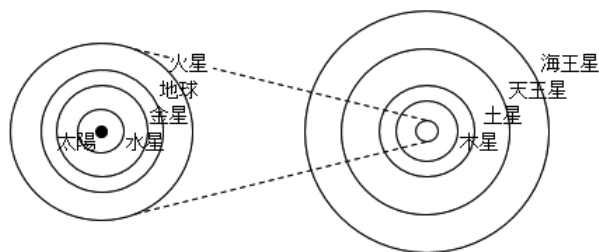


図 1.9: 太陽系

1.4 巨大な世界

最も弱い力である重力は、宇宙そのものを形作っている。視点をズームアウトすれば、たとえば宇宙飛行士が見た青い球形の地球、数々の探査機によって明らかにされつつある太陽系の惑星およびその衛星の姿、そして今や太陽系の外へと飛行を続けている惑星探査機（パイオニア 10, 11 号、ボイジャー 1, 2 号）があるが、探査機による情報はここまでである。

太陽に最も近い恒星であるプロキシマ・ケンタウリまでは 4.22 光年（1 光年は光の速さで 1 年かけて進んだ距離 = 9.46×10^{15} m）であり、太陽～地球間を 1 m に縮尺したとすると、太陽～海王星間が 30 m でプロキシマ・ケンタウリまでは 267 km となり、近いといってもいかに遠いかがわかる。ましてこの星を目指して飛行しているものはないので、広大なスペースからこの星の情報を得るには間接的な方法を用いねばならない。

大きな世界の物体をあげると、次に示すように、やはり**階層構造**

§1.4 巨大な世界

人間 → 地球 → 太陽系 → 銀河系 → 銀河群 → 銀河団 → 超銀河 → 宇宙

図 1.10: 階層をなす巨大な世界

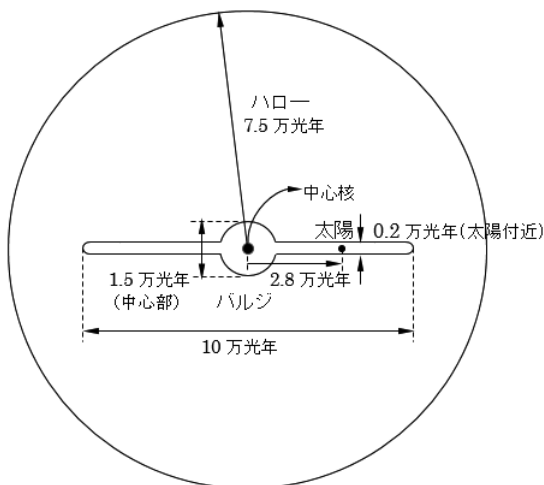


図 1.11: 銀河系

をなしていることがわかる。

太陽系の外に視野を広げてみれば、太陽やオリオンや天の川を含む直径約 10 万光年のディスク状の我々の**渦巻き銀河**（これを**銀河系**、**天の川銀河**と称する）がある。ディスクの厚みは 1.5 万光年でバルジ (bulge) と呼ばれている。

銀河系は数千億個の恒星や星間物質を含んでいて、太陽質量の 2000 億倍以上の質量である。太陽系は、ディスクの中心からディスク端に向かって 2.8 万光年隔った部分に位置する。天の川銀河の隣にある銀河で、銀河系と同程度の大きさをもち、やはり渦を巻き

第 1 章 物は何からできているか

ている銀河がアンドロメダ銀河 M31 で、銀河系から 230 万光年離れて存在する。恒星は銀河の中に存在する。

このような銀河の集まりが**銀河群**をつくり、大きさは 150 万光年ほどである。銀河群はより大きな銀河集団である**銀河団**を形成し、大きさは 1000 万光年以上である。乙女座銀河団は、我々から 5900 万光年離れたところにあり、2000 万光年ほどの大きさの中にさまざまな形をした約 2500 個の銀河を含んでいる。さらに大きな銀河集団として繊維または板状の**超銀河団**を形作る。その大きさは 1 億光年以上もある。それとともに**ボイド**と呼ばれる銀河がほとんどない空洞部分も存在する。超銀河団とボイドで大規模構造をつくるのが宇宙の姿である。

膨張宇宙の膨張する速さは遠方ほど速くなる。われわれから宇宙のある点までの距離 r と、その点が膨張する速さ v との間には**ハッブル法則**がなりたち

$$v = H_0 r \quad (1.2)$$

である。 H_0 は**ハッブル定数**でその値は

$$H_0 = (70.5 \pm 1.3) \text{ km/s/Mpc}, \quad (1 \text{ pc} = 3.26 \text{ 光年}, 1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}) \quad (1.3)$$

である。

われわれから見て、宇宙の膨張する速さが光速になるところが宇宙の果てである。宇宙の果て近くで発した光は、膨張する超高速の速さからくる光のドップラー効果を起こし、振動数ゼロ近くの電磁波になる。光速になるところが観測可能な宇宙の果てになる。それ

より遠くの部分は光速よりも速く遠ざかっている（空間の膨張の速さなので相対性理論には矛盾しない）ので永久に情報がやってこない世界である。その部分がどうなっているかの議論にもならない世界である。膨張する速さが光速になる宇宙の果てを**事象の地平線**という。宇宙の年齢は 137 億年といわれている。最も古い時代に放たれた光は、137 億年の間に 465 億光年も遠ざかってしまっている。

宇宙から素粒子までの物の大きさの比較を表 1.2 に対数目盛で示す。

1.5 ものの最も根源となるものは

§1.3 でミクロの世界の究極を追求し、現時点ではそれが点状粒子といわれるクォークとレプトンであることにたどり着いた。しかし、それがそれ以上分割できない究極のものであろうか。もっと極超高エネルギーを使って極微小の世界が覗けるようになれば、一時いわれていたようにクォークは、たとえば、より小さなサブクォークに分割可能であることになるのかもしれない。そしてまたサブクォークはサブサブクォークに分けられ、これは際限なく続くのだろうか。

あるいは過去に湯川が主張していたように「素領域」で仕舞いになるのであろうか。はたまた素粒子はあらかじめ決められた素領域を次々と移りゆくものなのだろうか。素粒子というものがあることを前提にしているが、素粒子はどこから来たのだろうか。現在の無数の素粒子の存在の根源はどうだったのだろうか。これに答えるた

第 1 章 物は何からできているか

めには「宇宙のはじめ」に遡らなければならない。

§1.5.1 真空

ビッグバン直後の状態、まだ、クォークスープになる前には何があったか。そこには少なくとも時間と空間、それとエネルギーの概念はあったと見るべきであろう。それを「真空」と呼ぶ。何かに對峙した真空ではなく真空だけがあるという意味での真空である。長い年月をかけてもっていたエネルギーは、幾多の物質を生んで、それらの物質の運動エネルギーになり、温度に直すと 3 K まで冷えた。時空のある点にエネルギーさえ与えれば、そこから粒子・反粒子の対が生まれ、あるいは粒子・反粒子対が消滅すればエネルギーだけが残る。このように真空は素粒子を生成したり消滅させたり、素粒子を別の素粒子に転化させたりする唯一のものである。ものの根源は、に対する答えは「真空」であるといえよう。

談話 1：物質の根源

物質世界を形成する粒子の中で、最も根源的なものは何であろうか。それは物を形作る必要があることから、安定なものでなければならない。力もほどほどのものであるのがよい。何ものをもってしても壊れることがないような、強い力で結びついているものでは、その後の変化や再配列は望めそうにない。めったにその現象が起こらないものでも困る。

強い力は多くの原子核を作るが、他の物質に変換し難い。弱い力は、圧倒的な物質の数があってはじめて現象が知覚できるし、重力

§1.5 ものの最も根源となるものは

もまた然りで、素過程でその効果は期待できない。残るは電磁気力である。

身の周りのものを形作っている力、そしてそれらを別の物質へと変え行く力、それが電磁気力である。実体は正、負に帯電した原子核と電子である。この組み合わせが原子であり、原子と原子を結びつけるのが電子による電磁気力である。ある物質から別の物質に変わるとき、電子の「再配列」が起こる。これが化学変化である。

森羅万象に関与する電子は、いつごろ宇宙に現れたか。ワインバーグの説によると、宇宙創成から 100 分の 1 秒程度経過したときには、すでに存在していたらしい。この時点では、光子、電子および陽電子、ニュートリノおよび反ニュートリノ、クォークおよび反クォーク（陽子、中性子を構成）などが存在していた。これらが渾然一体となって対生成、対消滅を繰り返していた。このうち、負の荷電をもった物質粒子として、現在でも安定に存在するのは電子だけである。しかも最も軽い荷電粒子であるから崩壊することのない安定な粒子である。正の荷電をもつ陽子は、クォークの複合粒子であるので、真の意味における素粒子とはいいいがたい。ここにおいて、物質を作る上で根源的な役割をする素粒子は、電子であるということになる。

第1章 物は何からできているか

表 1.2: 物の大きさ

10^{28}	—	宇宙 (930 億光年= 8.8×10^{26} m)
10^{24}	—	超銀河団 (大きさ > 1 億光年= 9.5×10^{23} m), 銀河団 (大きさ ~1000 万光年 = 9.5×10^{22} m), 銀河群 (大きさ ~150 万光年= 1.4×10^{22} m)
10^{20}	—	銀河系 (天の川銀河直径 9.5×10^{20} m)
10^{16}	—	最も近い恒星 (プロキシマ・ケンタウリまで 4.0×10^{16} m)
10^{12}	—	太陽系 (太陽~海王星間 4.5×10^{12} m), 太陽 (直径 1.39×10^9 m)
10^8	—	地球 (赤道直径 12 756 km), 月 (直径 3480 km)
10^4	—	エベレスト (標高 8848 m), 富士山 (標高 3776 m)
10^0	—	人 (平均身長 1.7 m), ダチョウの卵細胞 (直径 11 cm), ヒトの卵子 (直径 0.1~0.2 mm)
10^{-4}	—	ゾウリムシ (170~200 μ m), 赤血球 (6~8 μ m), バクテリア (1~10 μ m), ウイルス (20~450 nm)
10^{-8}	—	カーボンナノチューブ直径 (1 nm), 水分子 (300 pm)
10^{-12}	—	水素原子半径 (50 pm), 原子核 (ウラン核半径 7.8 fm, 酸素核半径 3 fm), 陽子・中性子 (1 fm)
10^{-16}	—	弱い相互作用の到達距離 (10^{-18} m), 電子・クォーク (大きさ < 10^{-19} m)
		⋮
10^{-35}	—	プランク長 (1.62×10^{-35} m)

第 2 章

素粒子たちは力をおよぼし合う

素粒子に働く力には 4 通りあり、その強さから、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用、重力相互作用に分類される。これらの一つ一つについて特徴を述べ、その各々の媒介粒子といわれるものについても見てみよう。また、素粒子の世界でのさまざまな単位についても紹介してみよう。

2.1 相互作用は 4 つある

素粒子の世界では、ある素粒子から別の素粒子に影響をおよぼすとき、影響をおよぼされっぱなしの素粒子もなければ影響をおよぼしっぱなしの素粒子もない。力を受ければ同じ力を相手に返す、それが素粒子の世界である。完全に対等な世界である。1 つの物体が他の物体に力をおよぼすとき、他の物体から逆向きで等量の力を受ける。これがニュートンの作用反作用の法則であったが、素粒子の場合には、2 つの素粒子が直接接触しないで力をおよぼしあう。電気力と同様である。2 つの素粒子の間に力を媒介するものが存在する。これについてはすぐ後で述べよう。

影響すれば必ず影響されること、あるいは何らかの力をおよぼせば、必ず同じ力が返ってくる。力が働けば何らかの作用をおよぼす。

第 2 章 素粒子たちは力をおよぼし合う

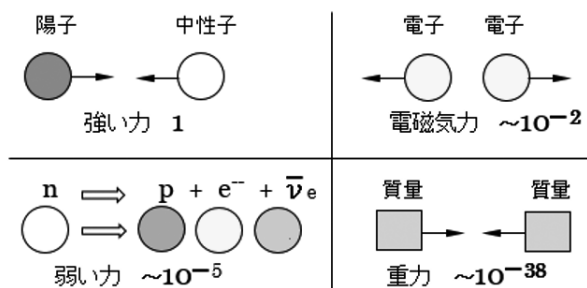


図 2.1: 4 つの力

互いに作用をおよぼすことを**相互作用**という。それでは、素粒子と素粒子の間にはどのような力が働くのだろうか。

相互作用には 4 種類あることがわかっている。それらは強い順に、**強い相互作用**、**電磁相互作用**、**弱い相互作用**、**重力相互作用**といわれるものである。これらは力の強さも違えば現象面も異なる。

図 2.1 に 4 つの力の粒子例を示す。

§1 で述べたように、強い相互作用は物質を作っている力のうち、原子核を形成している核子の間に働く力に見られる。これを**核力**という。原子核は陽子と中性子で構成されていて、核力は陽子と陽子、陽子と中性子、中性子と中性子の間でまったく同様に働き、陽子・陽子が 10^{-15} m の距離にあるときの電気力と比べて約 100 倍強い。陽子や中性子はクォークからできているので、素過程ではクォークの間で働く力になる。強い相互作用は、上に述べた核力のみならず、核子とパイ中間子などの**ハドロン**といわれる粒子同士の間で働く力になる。核子の集団としての原子核のうち、ある種類ではより安定な原子核に落ち着くために、2 個以上の核破片に分裂する**核分裂**が

ある。核分裂では多量のエネルギーが解放され、これを利用した**原子力**がある。

電磁相互作用について見てみると、物体がある形をなしているのは、原子・分子の電気力に起因する。方位を定める磁針が南北を示すのも、地球と磁針の間の磁気力によるものである。テレビジョンやラジオ放送なども、電磁波とアンテナ中の電子との相互作用によって受信ができる。日常的な力は全部この相互作用による。

弱い相互作用はどんな場合に現れるのだろうか。弱いということとはめったにこの相互作用による反応や現象が起こらないということである。それではまれにしかお目にかからないことなのであろうか。弱い相互作用による地熱発電や、星が光ることはそんなに稀なことではない。素過程としては極めて稀な現象であっても、その現象を起こす素材が極めて大量にある場合はどうであらうか。このときには、それが膨大な素材の数に比例した反応が起こり、その結果、全体としてわれわれに知覚できる現象になる。こうして弱い相互作用であっても、地熱は地中の放射性元素が崩壊するときに出るエネルギーに起因し、星のエネルギーは電子、ニュートリノや γ 線を伴う核融合反応が起こっていることによるものであって、十分われわれが知覚できるものである。また、ベータ崩壊といわれるもの、すなわち原子核のなかで中性子が陽子、電子、反ニュートリノに崩壊するのも弱い相互作用によるものである。

質量をもつものの間に働く重力相互作用は、誰しものが体験していることであって、素粒子の世界での素過程では、強い相互作用と比較すると実に 10^{-38} 倍も力が小さい。重力によって、大洪水が起きたり、惑星が太陽の周りを回ったりする力になることは、上述のよ

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

うに、重力の素材、すなわち質量をもつ素粒子が極めて沢山集まって物質を作っているからである。

では何が違ってこのような4つの力の区別が出てくるのだろうか。2つの素粒子の間に力が働くとき、それは瞬時にして力が働くのだろうか。2つの素粒子の間の空間に何か変化が生じているからなのだろうか。

2.2 力, 場, 媒介粒子

ニュートンの運動の第2法則によると、物体に力を加えれば加速度を生じる。逆に、加速度を生じさせるものが「力」である。速度が変化しているとき、その物体には何らかの力が働いている。素粒子の場合に力を加えるには、ある距離まで2つの粒子を近づけてやると、それに応じた力が働く。

§2.2.1 電気力

真空中に電荷 Q および q をもつ2つの粒子が距離 r だけ離れているとき、2つの粒子に働く電気力の大きさ F は、2つの粒子の距離の2乗に反比例し、それぞれの電荷の積に比例する。式で表すと

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \quad (2.1)$$

になる。これを電荷に関する**クーロンの法則**という。ここで、 ϵ_0 は**真空の誘電率**である。

働く力は、図 2.2 に示されるように、 Q と q が同符号なら反発力、異符号なら引力である。クーロン (C. A. Coulomb) は、1785 年に

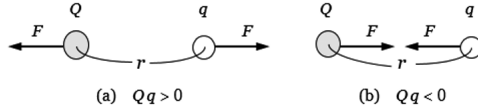


図 2.2: 電気力

ねじり天秤を用いてこの法則を導いた。

なぜ 2 つの荷電粒子の間にこのような力が働くのだろうか。ニュートン流では、力が働く理由は不問のまま。力は瞬時に伝わって、なぜ、どのようにして伝わるかということは問題にもならない。これは力の遠隔作用説といわれている。

この電気力を次のように電場 E を用いて書き換えてみる。電荷 Q があり、そこから離れたところにある電荷 q に働く力は、電場 E を用いて

$$F = qE \quad (2.2)$$

と表せる。これより電場の定義式として

$$E = \frac{F}{q} \quad (2.3)$$

が得られる。式 (2.3) より、電場とは $q = 1$ 、すなわち単位電荷に働く電気力のことである。しかし、この言い方は遠隔作用説を一步もでていない。

次に、(2.3) の F にクーロン力 (2.1) を代入し、

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.4)$$

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

として「電荷 Q から r の距離にある点での電場は上式で与えられる」といっても大差はない。

ところがこれを次のように解釈したらどうであろうか。「真空中に電荷 Q があると空間に電氣的ゆがみが生じ、電荷 Q から距離 r だけ離れた点でのゆがみの大きさは (2.4) であたえられる。これを電場という。さらに、その点に電荷 q があるとその電荷はゆがみにもとづく力を受け、その大きさは (2.2) で与えられる」と解釈しなす。電気の場合は、空間の各点にあり、それは空間の各点における電氣的なゆがみの量として現れる。電氣的なゆがみの量は、電気をもつ他の粒子に働く力として観測される。

ここにおいて、**電場**という新しい概念を導入し、空間の各点での電氣的な「ゆがみ」が存在し、電荷をもつものがこのゆがみから影響されて、それが電気力である。これは力に対して別の解釈をしたことを意味する。

2.2.1.1 媒介粒子

空間が電氣的にゆがむこと、さらにこのゆがみが遠方にまでおよぼされることから、次のような見方ができる。電荷の存在がごく近傍の空間を電氣的にゆがませ、このゆがみがさらにまた近くの空間をゆがませて、次々と遠方まで伝わって行く描像が生じる。このゆがみを伝えるものとして、「ある種の粒子」に到達する。これが**媒介粒子**であり、「力の伝達粒子」である。

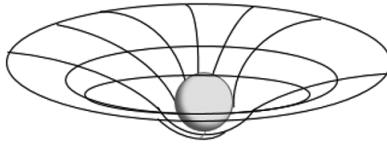


図 2.3: 重力場

2.2.1.2 重力

同様のことが、重力についてもいえる。質量 M と m に働く力の大きさは

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad G: \text{重力定数} \quad (2.5)$$

の万有引力が働くが、これも質量 M の周りの空間がゆがみ、 r の距離にある m にゆがみにもとづく力がおよぼされると考えられる。質量に起因するゆがみが空間に生じるということは、空間に「重力場」があることに等しい。この空間に別の質量を置くと、その質量は重力場のゆがみの大小を感じることができ、それに応じた力がおよぼされる。

図 2.3 が一つの質量による重力場を表し、空間にゆがみが生じている。このゆがみが広がって行くための伝達粒子を考えることができる。

2.2.1.3 場と媒介粒子

このように、空間はさまざまな場、ゆがみをもつことができ、ゆがみのない平坦な空間が真空である。

電磁場は、電氣量をもつ粒子が原因となることができるものであり、

第 2 章 素粒子たちは力をおよぼし合う

表 2.1: 4 つの相互作用と媒介粒子

力 (相互作用)	強さ	媒介粒子 (場の粒子)	記号	力の到達距離	働く例
強い力	1	グルーオン	g	$\sim 10^{-15} \text{ m}$	原子核の形成
電磁気力	$\sim 10^{-2}$	光子	γ	∞	原子・物質の形成, 電気回路の働き
弱い力	$\sim 10^{-5}$	W, Z ボソン	W, Z	$\sim 10^{-18} \text{ m}$	不安定核崩壊, 星のエネルギー生成
重力	$\sim 10^{-38}$	重力子	G	∞	万有引力, 天体の軌道運動

重力場の源は質量である。そのゆがみを伝えるものが媒介粒子である。電磁場の媒介粒子は**光子**（フォトン）であり、重力場では**重力子**（グラヴィトン）と呼ばれる。

このように空間はさまざまなゆがみをもつことができ、言葉を変えていえば、さまざまな場をもつことができる。電気量と質量をもった粒子があれば、その周りの空間は電磁場であり、なおかつ重力場でもある。電磁場、重力場以外にも場が存在する。

強荷をもつ 2 つの素粒子の間には**強い力**が働き、**弱荷**をもつものでは**弱い力**が相互に働く。媒介粒子は、前者が**グルーオン**（膠着子）であり、後者が**ウィークボソン**（弱ボーズ粒子）または**ゲージボソン**といわれる W^{\pm}, Z^0 である。

我々の世界には、本質的には異なった 4 つの力があることが知られていて、それぞれの力に応じて媒介粒子が存在する。それを表にすると表 2.1 のようになる。

力の強さは、2 つの陽子が距離 10^{-15} m におかれた場合で、強い力を 1 とした。第 5 の力があるといわれたときもあり、これを実験的に見つけようとした試みもなされたが、現時点での力の種類はこれら 4 種類である。

§2.3 力はどこまで届くのだろうか

このように、自然界に存在する究極のものは素粒子だけであり、素粒子は1つ以上の特定の場をつくる。場は、それに感応する素粒子と相互作用をし、力が生じる。場（空間のゆがみ）の伝播にあずかるものとして媒介粒子があり、これも素粒子である。

素粒子は、**ド・ブロイ** (L. de Broglie) の関係により、粒子でもあり波でもあるので、素粒子をある**波動関数**で表すことができる。したがって、**場と粒子**とは同義語であり、それはまた波動関数で表現できる。力とは、媒介粒子によるものといってもよいし、2粒子間であたかも媒介粒子をキャッチボールすることによる作用、あるいは、素粒子と場との相互作用の結果であるといってもよい。

このように空間の各点には場があり、その場に感応する量をもつものが場の中に存在すると、それには力が働く。場をつくるもとは、電荷であったり質量であったりするが、場から力を受けるものの帯びている感応量は、その場を生じさせた物理量と同じものである。

2.3 力はどこまで届くのだろうか

表 2.1 にある力の伝達距離は何によって決まるのであろうか。量子論での**ハイゼンベルグ** (W. K. Heisenberg) の**不確定性関係**より、エネルギー、時間、位置、運動量の不確定さ（測定精度）を $\Delta E, \Delta t, \Delta x, \Delta p$, **プランク定数**を h とすると

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (2.6)$$

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (2.7)$$

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

が成り立つ。

たとえば、(2.6) 式より Δt が小となるような短い時間ではエネルギーの不確定性 ΔE は大きくなり、短時間ではエネルギーを正確に決定できない。このことから、エネルギーの保存則には測定する時間 Δt によって $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$ 程度の不確定性があり、厳密にはエネルギー保存則はこの程度破れている。位置と運動量の間でも同様のことがいえて、ものの位置を正確に決めれば決めるほど運動量の不正確さは大きくなる。

次に、エネルギーと時間の不確定性関係を力の到達距離に適用してみる。たとえば、湯川が展開したものに、原子核の中の核子、すなわち陽子・中性子を結びつけている**核力**は、 π 中間子の交換によるものであるとした。

核子である陽子と中性子があったとき、陽子は π^+ を放出して自分自身は中性子になり、 π^+ は中性子に吸収されて中性子は陽子になることを極めて短時間に繰り返している。中性子から出発しても同様で、中性子は π^- を放出して陽子になり、別の陽子が放出された π^- を吸収して中性子になる。すなわち、陽子と中性子の間には相互作用があって力が働く。これが核力である。

また、陽子は π^0 を放出して陽子のままの状態であっても、この π^0 を別の陽子または中性子が吸収してやはり陽子あるいは中性子のままで存在する場合と、中性子が π^0 を放出して中性子のままで存在し、別の中性子または陽子が π^0 を吸収して中性子あるいは陽子のままの状態であることが考えられる。これらの場合にもまた陽子・陽子間、陽子・中性子間、中性子・中性子間にも核力が働く。

§2.3 力はどこまで届くのだろうか

すなわち、ごく短時間だけ

$$p \rightleftharpoons n + \pi^+, \quad n \rightleftharpoons p + \pi^-, \quad p \rightleftharpoons p + \pi^0, \quad n \rightleftharpoons n + \pi^0 \quad (2.8)$$

の状態が許される。したがって、エネルギー保存が短時間破れることになるが、これが核力の原因にもなる。

アインシュタイン (A. Einstein) によれば 質量とエネルギーは等価であって、 $E = mc^2$ (c は光の速さ) である。質量をエネルギーに換算して以下の議論に用いる。ただし、エネルギーの単位には MeV を使用する (後述するが $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ eV} = 6.2 \times 10^{-19} \text{ J}$ である)。

陽子, 中性子, π 中間子の静止質量を m_p, m_n, m_π とし

$$m_p c^2 = 938 \text{ MeV}, \quad m_n c^2 = 940 \text{ MeV}, \quad m_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV} \quad (2.9)$$

であることを用いる。たとえば

$$p \rightleftharpoons n + \pi^+ \quad (2.10)$$

の場合には、左辺と右辺のエネルギーを比べると、右辺の方が次に示す量だけ大きい。

$$\Delta E = (m_n + m_\pi - m_p)c^2 \quad (2.11)$$

$m_p \approx m_n$ であるので

$$\Delta E = m_\pi c^2 \quad (2.12)$$

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

となる。しかし、不確定性関係から

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \quad (2.13)$$

の時間は**エネルギーの保存則**を破ってもよいので、この時間だけ π 中間子が生じていてもよいことになる。したがって、一つの核子から出た π 中間子がほぼ光速で進んで行って、別の核子に吸収されるまでの距離 l_π は

$$l_\pi = c\Delta t = \frac{c\hbar}{m_\pi c^2} \quad (2.14)$$

である。この式に数値を代入すると

$$l_\pi = \frac{3 \times 10^8 \times 1.05 \times 10^{-34}}{140 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.4 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (2.15)$$

が得られる。このことから、強い相互作用である核力の到達距離は約 10^{-15} m である。

湯川秀樹が1935年にこれを提唱し、1947年に**パウエル** (C. F. Powell) などによって原子核乾板中で π 中間子が発見された。その質量エネルギーは140 MeVであった。

また、**核力のポテンシャル**は、 r を核子間の距離として

$$V = V_0 \frac{e^{-r/l_\pi}}{r} \quad (2.16)$$

で与えられた。これが**湯川ポテンシャル**である。

上述の類推から、交換する粒子 X の質量が m_X であるとき、力の到達距離は

$$l_X = \frac{\hbar}{m_X c} \quad (2.17)$$

である。

電磁力は、質量が $m_X = 0$ である光子を交換するので $l_{\text{photon}} = \infty$ となり、クーロン力は無限の彼方まで到達することができる。同様に、重力も重力子の質量が 0 なので、到達距離は無限大になる。

弱い力は、ウィークボソン W または Z によって媒介され、これら粒子の質量は約 100 GeV なので、力がおよぼされる範囲は

$$l_{\text{weak}} = \frac{c\hbar}{1 \times 100 (\text{GeV})} \sim 10^{-18} \text{ m} \quad (2.18)$$

となり、非常な短距離力である。

2.4 電磁相互作用

粒子が電荷あるいは電氣量をもっていれば電磁相互作用を起すことができる。電荷 $-e$ をもった 2 つの電子が接近すると、それらはクーロン力で反発されて進路が曲げられる。この現象は、波動としての電磁波を用いて次のように説明できる。

図 2.4 に示すように、電子 1 の荷電粒子の運動によってその周りの電磁場の状況が変化を来し、この変化がさらにその近傍の空間に伝わり、波動としての電磁波が伝わる。電子 2 はこの電磁波に感応して力を受ける。

これを粒子像でいえば図 2.5 に示すように、電子 1 から光子 (γ) が放出され、その光子が電子 2 に吸収されてこれが力となる。電子 1, 2 は反跳を受けて進路が曲げられる。

A 点の電磁場のエネルギーは B 点まで光子が運んで行く。電子 1, 2 の役割は当然交換できる。図 2.5 のように、この様子を図示した

第 2 章 素粒子たちは力をおよぼし合う

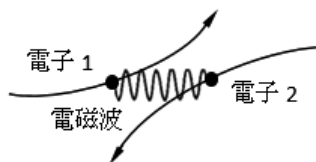


図 2.4: 電磁波が仲立ちをする電子と電子の相互作用

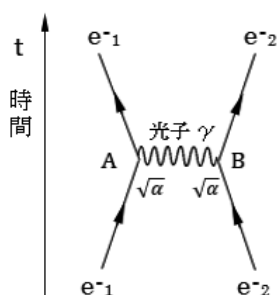


図 2.5: 電子・電子のファインマン図

ものが**ファインマン** (R.P.Feynman) によって考案された**ファインマン図** (Feynman diagram) である。

図中の点 A, B のように、電子と光子の相互作用を表す**バーテックス** (vertex) といわれる点があり、このときの相互作用の強さは $\sqrt{\alpha}$ である。 α は**電磁相互作用の結合定数**といわれる。2つの荷電粒子間のクーロン力は、双方の電荷の積（単位電荷 e の場合は e^2 ）に比例する。結合定数を無次元量にするために、相対論的量子力学

に現れるプランク定数 $\hbar/2\pi$ と光速 c を用いると

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0359895(61)} \approx \frac{1}{137}, \quad (\epsilon_0 \text{ は真空の誘電率}) \quad (2.19)$$

となって、これは原子スペクトルの微細構造を表すパラメータでもあり、**微細構造定数**ともいわれている。

α が無次元であることを示す。 e の次元は C, ϵ_0 は F/m, \hbar は J·s, c は m/s であり、F は C/V であるから α の次元は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \text{ より } \frac{C^2}{F/m \cdot J \cdot s \cdot m/s} \\ &= \frac{C^2}{F \cdot J} \\ &= \frac{C^2}{C \cdot V^{-1} \cdot J} \\ &= \frac{C \cdot V}{J} \\ &= \frac{J}{J} = 1 \end{aligned}$$

である。平行板コンデンサーで電圧 V (次元は V)、蓄えられる電気量 Q (次元は C) のときの静電エネルギー $\frac{1}{2}QV$ (次元は C·V)、項 C·V はエネルギーの次元 J となる。

α はまた 1 自然単位の距離 $r = \hbar/mc$ だけ離れたところにある電子相互の静電エネルギー

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar/mc)} \quad (2.20)$$

第 2 章 素粒子たちは力をおよぼし合う

と電子の静止エネルギー

$$E = mc^2 \quad (2.21)$$

との比でもある。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar/mc)} \frac{1}{mc^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (2.22)$$

荷電粒子の電磁気現象について、光子の交換で記述する力学を**量子電磁力学** (Quantum Electro Dynamics; QED) という。

2.5 強い相互作用

湯川理論の成功によって、核子同士を結びつける力の媒介粒子は π 中間子であることがわかってきた。

その後、**クォーク** (quark) が登場し、**核子**や中間子がクォークからなっていることもわかってきて、核子の中のクォークとクォークを結びつけるグルーオンの働きがあることもわかった。すなわち、強い相互作用は、クォークとクォークの間で働き、媒介粒子は**グルーオン** (gluon) である。

クォークは**カラー荷**をもち、グルーオンは強い力の源となるカラーを運んでいくと考えられる。カラー荷は 3 種類あり、これに赤 (red)、緑 (green)、青 (blue) と名づけた。クォークの反粒子である反クォークは、これらの補色である反赤 (シアン)、反緑 (マゼンタ)、反青 (黄) をもつ。したがって、たとえば赤クォークと青クォークの相互作用の場合、媒介するグルーオンの色は、2 重構造

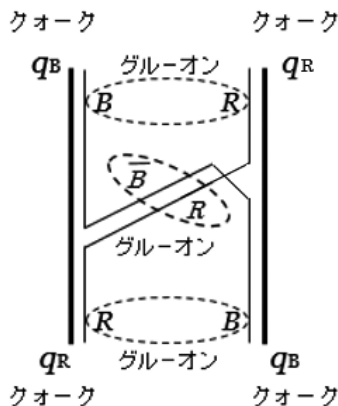


図 2.6: クォーク 2 つがカラーを交換

の色であって、このときは赤・反青となり、クォーク同士が色を交換することができる。

図 2.6 に色の交換の様子を示してある。赤クォークと青クォークの色が交換されることが表されている。クォークの相互作用にあずかるグルーオンは、赤と反青の 2 重の色をもっている。グルーオンは左から右へ上り坂になっている方向に進むものとする。反青は時間と逆向きに坂を下る方向に進む。

赤クォークから出て行く色が赤色とすると、青クォークからは青色が出なければならないが、赤クォークから赤色と一緒に反青が青クォークに向かっていくと考えられる。反粒子の移動は、粒子と逆方向の移動になる。

グルーオンが 2 重のカラーをもつ意味は、粒子が左から右に進むことと、反粒子が右から左に進むことは同じであることによる。強い力はグルーオンの交換によって生じ、力学的な取り扱いをするの

が量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics; QCD) である。前に述べたように、電磁相互作用を表す結合定数は α であったが、強い相互作用の場合は α_s で結合定数を表す。

2.6 弱い相互作用

弱い力、ベータ崩壊やニュートリノ反応などの**レプトン** (lepton) といわれる粒子を含むときに働く力

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.23)$$

である。中性子のベータ崩壊は、中性子が壊れ、陽子と電子と反電子ニュートリノになるものである。これを図 2.7 に示す。 $\bar{\nu}_e$ は反電子ニュートリノである。この図は崩壊の詳細がわからなかった時代の図である。図では n が消滅し、 p , $\bar{\nu}_e$, e^- が発生する点でベータ崩壊が起こっている。1 点で 4 つの粒子が反応を起こす強さは、フェルミ結合定数で表され

$$G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (2.24)$$

である。

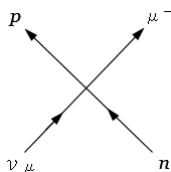
次式で表されるミューニュートリノが中性子に衝突して、陽子と μ^- 粒子が発生する反応

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \quad (2.25)$$

も、図 2.8 に示すように、やはり 4 つの粒子が 1 点で交わるもので



図 2.7: 中性子のベータ崩壊図

図 2.8: $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ 反応で 4 つの粒子が 1 点で交わる非常な短距離力

ある。4 つの粒子が 1 点に集まったときに力が働き、非常な短距離力である。

今日では、1 点を拡大して見られるようになった。すなわち電子やミュー粒子、ニュートリノなどのレプトンと、中性子や陽子などのハドロンを形成しているクォークが近づくと、媒介粒子のウィークボソンである W ボソンや Z ボソンを交換して力をおよぼす。こ

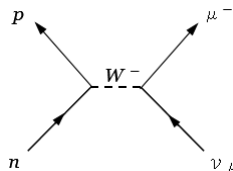


図 2.9: 図 2.8 を拡大した図

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

れを図2.9に表す。図では W^- ウィークボソンを交換している。

W, Z ボソンの質量は

$$m_W c^2 = (80.425 \pm 0.083) \text{ GeV}$$

$$m_Z c^2 = (91.1876 \pm 0.0021) \text{ GeV}$$

と重く

$$l_{\text{weak}} = \frac{\hbar}{m_{\text{weak}} c} \quad (2.26)$$

からわかるように、弱い相互作用の到達距離 l_{weak} は、 m_{weak} が非常に重いため、粒子が約 10^{-18} m まで近づかないと力をおよぼさない。したがって反応の起こる確率は小さく、弱い相互作用となる。ウィークボソンによるポテンシャルは、距離 r に対して

$$V(r) \approx \frac{G_F}{l_W^2} \cdot \frac{e^{-r/l_W}}{r} \quad (2.27)$$

である。到達距離は、 $\hbar = 6.6 \times 10^{-25} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ として

$$l_W = \frac{\hbar c}{m_W c^2} = \frac{6.6 \times 10^{-25} \times 3 \times 10^8}{80} = 2 \times 10^{-18} \text{ m} \quad (2.28)$$

であり、極めて短距離力である。

2.7 重力

重力は質量をもつあらゆる物質の間に働く力である。地球上にいる我々は、誰一人として重力の束縛から逃れることはできない。

§2.7 重力

重力の量子論は、まだ成功していない。質量 m_1, m_2 に働くニュートンの**万有引力**のポテンシャルは

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (G \text{ は**重力定数**}) \quad (2.29)$$

であり、クーロンポテンシャルと同じ r^{-1} の形をしていて遠距離力であって、無限の遠くまで働く。したがって、質量と質量の間に働く重力の媒介粒子の質量は 0 であることが予想される。これを**重力子**とよぶ。電子の間に働く重力と、クーロン力とを比較すると、その比は 10^{-33} となるから、素粒子反応では無視できる強さである。

超極微小の世界になると重力の働きが顕著になってくる。どの程度かを考える。まず、自然界の基本定数と次元についてみる。長さ、時間、質量の次元をそれぞれ L, T, M とすると基本定数は

光速	$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$	L/T
プランク定数	$h = 6.626\,075\,5 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ($\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)	ML ² /T
重力定数	$G = 6.672\,59 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	L ³ /MT ²
ハッブル定数	$H_0 = (70.5 \pm 1.3) \text{ km/s/Mpc}$ (1 Mpc = 10 ⁶ pc, 1 pc = 3.09 × 10 ¹⁶ m)	1/T

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

である。これらを組み合わせて長さの次元をもつものは

$$d = \frac{c}{H_0} \quad \text{と} \quad \ell = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (2.30)$$

の2つだけである。上の式の定数に値を入れると

$$d \approx 140 \text{ 億光年}, \quad \ell = 1.62 \times 10^{-35} \text{ m} \quad (2.31)$$

となり、 d はハッブルの法則にしたがって光速 c で拡がると仮定したときの宇宙の大きさで、現在知られる表 1.2 の値とは異なる。 ℓ は長さの最小単位になり、**プランク長**といわれるものである。

素過程としての重力は、プランク長、あるいはそれ以下のスケールになって初めて意味が出てくる極微の世界の力である。

基本定数を使って長さ、質量、時間を表す。長さについては上に述べたプランク長をあらためて l_{pl} と表すと

$$l_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (2.32)$$

であり、長さを基本定数で表したことになる。質量は**プランク質量**で

$$m_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (2.33)$$

と表される。次の量を定義する。

$$t_{\text{pl}} = \frac{\hbar}{m_{\text{pl}} c^2} = \frac{G m_{\text{pl}}}{c^3} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s} \quad (2.34)$$

$\hbar/m_{\text{pl}}c^2$ の次元は $\text{J} \cdot \text{s} / \text{J}$ で秒になり、これが基本定数を使って時間を表したものである。さらに**プランク温度**を T_{pl} とすると、**ボルツマン定数** (Boltzmann constant) を k としてエネルギーは

$$kT_{\text{pl}} = m_{\text{pl}}c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (2.35)$$

である。なお、プランク温度は

$$T_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \frac{c^2}{k} \approx 10^{32} \text{ K} \quad (2.36)$$

である。

したがって、 10^{-35} m 以下の世界は、エネルギーが 10^{19} GeV 、温度 10^{32} K 、時間が創生後 10^{-44} s 経過するまでの世界であり、この状態の宇宙では、重力の量子論が意味をもつ。

2.8 反応の断面積

趣向を変えて素粒子反応の起こりやすさを考えてみよう。素粒子反応の起こりやすさを表すのに、その反応の**断面積** (cross section) を指定する。素粒子同士の衝突で、コライダーといわれる衝突型加速器以外の加速器では、加速した入射粒子（ビーム）を標的（ターゲット）に衝突させるとき、入射したビームの数（本数）が単位面積 (1 m^2) ならびに単位時間 (1 s) 当たり N 本で、そこでの衝突数が単位時間当たり N' 個であったとする。この際、入射粒子と標的粒子の大きさが大きければ大きいほど、衝突の起こる確率が大い。粒子の大きさとは、相互作用のおよぼされる実効的な範囲をいう。

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

衝突の起こる確率は、次の量 σ に比例する。

$$\sigma = \frac{N'}{N} \quad (2.37)$$

σ の単位は、 N' が 個/s, N が 個/m²/s なので m², すなわち、面積の次元をもつので、これを**全断面積**という（どのような反応が起きてもよく、全部の反応の合計という意味である）。

素粒子や原子核物理学では、m² の単位では大きすぎるので、次の単位を使う。

$$1 \text{ b (バーン; barn) } = 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ mb} &= 10^{-31} \text{ m}^2, & 1 \text{ } \mu\text{b} &= 10^{-34} \text{ m}^2, \\ 1 \text{ nb} &= 10^{-37} \text{ m}^2, & 1 \text{ pb} &= 10^{-40} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

1 b とは、原子核の大きさが 10⁻¹⁴ m 程度なので、原子核の断面積が 10⁻²⁸ m² であることに基づく。

標的にビームが当たって、ビームの本数が N から $N - dN$ 本に減少したとする。 dN は減少したビーム本数、 dx を標的の厚さ、 n を単位体積あたりの標的数、断面積を σ とする。 $n = N_A \rho / A$ であり N_A はアボガドロ数、 ρ は標的の密度、 A は標的の質量数である。これらの量の間には

$$-\frac{dN}{N} = n \sigma dx \quad (2.40)$$

がなりたつ。標的の厚さが厚いときには

$$\int \frac{dN}{N} = - \int n \sigma dx \quad (2.41)$$

を計算する。これは次のようになる。

$$\begin{aligned}\ln N &= -n\sigma x + C, \\ \therefore N &= e^{-n\sigma x + C} = Ke^{-n\sigma x}\end{aligned}\quad (2.42)$$

ここで $x = 0$ で入射ビーム本数が $N = N_0$ とすると、 $K = N_0$ となって次の式を得る。

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} \quad (2.43)$$

これは反応（散乱）しないで標的を通過したビームになる。したがって、反応粒子数は

$$N = N_0 - N_0 e^{-n\sigma x} = N_0(1 - e^{-n\sigma x}) \quad (2.44)$$

と表される。逆に、 N_0 本のビームで生じた反応数 Y から断面積を求めるときは

$$Y = N_0(1 - e^{-n\sigma x}) \quad (2.45)$$

より

$$e^{-n\sigma x} = \frac{N_0 - Y}{N_0}, \quad -n\sigma x = \ln \frac{N_0 - Y}{N_0}, \quad \sigma = \frac{1}{nx} \ln \frac{N_0}{N_0 - Y} \quad (2.46)$$

である。

断面積 σ の円盤のさらに小さな部分 $d\sigma$ にビームが当たると (θ, ϕ) 方向の小立体角 $d\Omega$ に散乱されるものとする。 $d\sigma(\theta, \phi)$ の

ことを**微分断面積**といい,

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \quad (2.47)$$

を**単位立体角あたりの微分断面積**という。立体角の代わりに運動量, エネルギーを用いた

$$\frac{d\sigma}{dP'}, \quad \frac{d\sigma}{dE} \quad (2.48)$$

なども用いられる。また, これらの混合した $d^2\sigma/d\Omega dE$ 等も用いられる。

2.9 極微の世界の単位は何だろう

エネルギー, 質量, 運動量などの単位としてジュール, キログラムなどで素粒子を記述するためには, 単位があまりにも大きすぎて不便である。極微の世界では, エネルギーの単位として**電子ボルト**を用いると便利である。

§2.9.1 エネルギー

1 電子ボルト (eV) は, 1 電気素量 e の荷電粒子が 1 ボルトの電位差で加速されて得るエネルギーのことである。

電荷 e の粒子が電場 E の中で加速されて得るエネルギーは eE であり, 距離 ℓ の間に電位差 V がある空間で得るエネルギーは

$$\int_0^\ell eE dr = e \int_0^\ell E dr = eV \quad (2.49)$$

§2.9 極微の世界の単位は何だろう

である。1 eV の定義により, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, $V = 1 \text{ V}$ の数値を代入して

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} 10^3 \text{ eV} &= 1 \text{ keV}, & 10^6 \text{ eV} &= 1 \text{ MeV}, \\ 10^9 \text{ eV} &= 1 \text{ GeV}, & 10^{12} \text{ eV} &= 1 \text{ TeV} \end{aligned} \quad (2.51)$$

である。

§2.9.2 質量

アインシュタインの関係式 $E = mc^2$ より, 質量 m は $m = E/c^2$ であるから, エネルギーを eV で表すと, 質量の単位は

$$[m] = \text{eV}/c^2 \quad (2.52)$$

となる。

電子, 陽子の質量は $m_e = 9.1095 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $m_p = 1836m_e$ であるから

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= 9.1095 \times 10^{-31} \times (2.9979 \times 10^8)^2 = 8.1871 \times 10^{-14} \text{ J} \\ &= 0.5110 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.53)$$

であり

$$m_e = 0.5110 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.54)$$

第2章 素粒子たちは力をおよぼし合う

となる。同様に陽子の質量は

$$m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.55)$$

である。

§2.9.3 運動量

質量が m 、速さが v の粒子の運動量は

$$p = mv \quad (2.56)$$

であって、SI系では $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ である。静止質量を m_0 として、アインシュタインの関係式

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (2.57)$$

より

$$p^2 = \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2} \quad (2.58)$$

で $E, m_0 c^2$ を eV で測れば、運動量の単位は

$$[p] = \text{eV}/c \quad (2.59)$$

である。たとえば、1 GeV のエネルギーをもつ電子の運動量は、静止質量による部分を無視すると約 $1 \text{ GeV}/c$ となる。

§2.9.4 自然単位系

$c = \hbar = 1$ とおいた単位系を自然単位系という。この単位系では

$$E = m \quad (2.60)$$

§2.9 極微の世界の単位は何だろう

$$E^2 = p^2 + m_0^2 \quad (2.61)$$

となり，エネルギー，質量，運動量の単位は同じになる。

E, m, p の単位 eV , eV/c^2 , eV/c は， E, m, p ともに eV で表すこともあるが，区別をするために $c = 1$ の系でも

$$\text{eV}, \quad \text{eV}/c^2, \quad \text{eV}/c \quad (2.62)$$

と表すことが多い。

第3章

素粒子を分類する

現在、300種を超える素粒子およびそれらの複合粒子が発見されている。それらはある性質に基づいて整然と分類される。陽子と中性子という2種類の粒子でできている原子核の場合は、安定な核種が約280、不安定核種が約1700種ある。2種類の粒子の組み合わせでこの数である。他の粒子では原子核のようなものは構成できないのだろうか。

粒子の分類の仕方はいろいろあり、それを使用する立場によって異なる。この章では粒子の分類法について見ておこう。ヒッグス粒子については未知の部分も多いが、役割なども考察する。

3.1 分類の仕方

分類法は、成員粒子のどのような性質を共通項にするかによって、本質的に重要になったり、あまり重要でないグループになったりすることを含んでいる。粒子にはさまざまな性質がある。たとえば、質量(m)、電荷(Q)、スピン(S)、寿命(τ)などがある。

電荷は、電気素量 e の何倍あるかで表し、整数正電荷のものを $2e, e$ 、負電荷のものを $-e, -2e$ などと表すが、 e を単位にした電荷で $2, 1, -1, -2$ ともいう。粒子の自転に相当するといわれるスピンの、**プランク定数** \hbar (換算プランク定数またはディラック定数) の

何倍あるかという \hbar , $\frac{1}{2}\hbar$ などの表記に代わって, \hbar を単位にした 1 , $\frac{1}{2}$ と表すことが多い。これを**プランク単位系**ともいう。粒子に対して, いくつかの属性による分類を行なってみよう。

3.2 スピンは整数か半整数か

スピンは, スケーターの自己回転と同じように, 粒子の自転としてとらえることもできるが, そのように単純なものではない。粒子のスピンは量子力学上のある性質であって, 便宜的にスケーターのスピンになぞらえたものである。右回り, 左回り, 自転の角運動量なども便利だから用いているのに過ぎない。粒子のスピンを具体的な自転とすると, 矛盾することも出てくるが, これに関しては別章でふれよう。

スピンの整数か半整数かで粒子を大別する。スピンの整数か, 半整数かで粒子の性質はがらりと変わり, スピンが 1 の粒子か, スピンが $1/2$ の粒子かでは粒子の性質・振る舞いは天と地ほどの違いになる。スピンの整数の粒子には, 光の本性である光子や, 湯川の予言した中間子などがあり, スピンの半整数の粒子には, 電子・陽子・中性子などがある。スピンの半整数の粒子系でも, それが偶数个結合した粒子系は, 整数スピンをもつ粒子と同等である。整数の粒子を**ボーズ粒子** (ボソン; boson), 半整数の粒子を**フェルミ粒子** (フェルミオン; fermion) という。これらの名称の由来は**サティエンドラ・ボース** (S. Bose; インドの物理学者), **エンリコ・フェルミ** (E. Fermi; イタリア, アメリカの物理学者) による。

粒子は同時に波動でもあり, これを表現するのに**波動関数**を用い

第3章 素粒子を分類する

る。2つの同じ種類の粒子1,2があり、この状態を表す波動関数を $\Psi(1,2)$ とする。2つの粒子を入れかえたときの波動関数は $\Psi(2,1)$ であるが、観測するものは $|\Psi(1,2)|^2$ であり、入れかえたものは元の状態と区別ができないとすると

$$|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2 \quad (3.1)$$

である。この結果、2つの波動関数は、その位相因子 (η と表す) の違いしかない。

まず粒子を入れかえて

$$\Psi(2,1) = \eta\Psi(1,2) \quad (3.2)$$

とすると、粒子をもう一度入れかえて

$$\Psi(2,1) = \eta\Psi(1,2) = \eta^2\Psi(2,1) \quad (3.3)$$

すなわち

$$\Psi(1,2) = \eta^2\Psi(1,2) \quad (3.4)$$

であり、このことから $\eta^2 = 1$ である。よって

$$\eta = \pm 1 \quad (3.5)$$

となる。波動関数の符号が同じである場合

$$\Psi(2,1) = \Psi(1,2) \quad (3.6)$$

§3.2 スピンは整数か半整数か

はその粒子を**ボーズ粒子**といい、波動関数の符号が変わる場合

$$\Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2) \quad (3.7)$$

はその粒子は**フェルミ粒子**という。

ボーズ粒子のときは

$$\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1) \quad (3.8)$$

であり、入れかえに対しては粒子 1,2 の位置座標が入れかわるだけなので、同一位置座標に対しては、同じ位置を何個でも粒子が占めてもよい。

これに対して、フェルミ粒子の場合は同一粒子である 2 つの粒子の状態が

$$\Psi(2, 1), \Psi(1, 2) \quad (3.9)$$

の 2 つを占めたとする。フェルミ粒子であるからこれらの間には

$$\Psi(2, 1) = -\Psi(1, 2) \quad (3.10)$$

の関係がある。粒子 1 と 2 が同じ粒子であり同じ状態を占めるとすれば

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(1, 2) \quad (3.11)$$

すなわち

$$2\Psi(1, 2) = 0 \quad (3.12)$$

$$\therefore \Psi(1,2) = 0 \quad (3.13)$$

となって波動関数の存在意味はなくなってしまう。よって、同じ状態を 2 つの粒子が占めることはできない。これが**パウリ (W. Pauli) の排他律**である。

同一のボーズ粒子が多数あるときには、統計的性質が**ボーズ・アインシュタイン統計**に従い、同一のフェルミ粒子が多数あるときには、**フェルミ・ディラック統計**に従う。したがって、整数スピンの粒子はボーズ・アインシュタイン統計に従い、同じ状態を何個でも占めることができ、半整数スピンの粒子はフェルミ・ディラック統計に従って、同じ状態にはただ 1 つの粒子しか占有できない。

ボーズ粒子は一つの状態に何個でも入るので、最低エネルギー状態に多数の粒子が存在することができる。これを**ボーズ・アインシュタイン凝縮**という。超伝導現象などはその例である。温度が 0 K ではすべてのボーズ粒子が凝縮する (§16.5.3 参照)。

3.3 粒子の役割はどうであるか

粒子がどのような役割をもっているかによって、次の 3 種類に分けられる。

- (A)力の媒介をする粒子
- (B)物質を形成する粒子
- (C)質量の起源となった粒子

広義の「粒子」全体は、狭義である粒子と反粒子からなる。狭義の

§3.3 粒子の役割はどうであるか

粒子は通常は単に粒子といい、陽子や中性子などである。

現実の我々の宇宙は、粒子でできていることがわかってきた。反粒子の世界は、広く宇宙を見渡しても観測にはかからなかった。反粒子がつくられても、圧倒的に多い粒子と反応して消滅してしまう。

反粒子は、粒子と質量、電荷の大きさ、スピン、寿命などは同じで、符号をもつ量については逆符号であり、たとえば電荷は異符号である。したがって、粒子と反粒子のこのような量を加えれば 0 になる。電子 e^- の反粒子は**陽電子** e^+ であり、陽子 p に対しては**反陽子** \bar{p} が、中性子 n については**反中性子** \bar{n} が対応している。

ビッグバンによって宇宙が誕生して、生まれたばかりのはじめの宇宙では、粒子と反粒子の数は同数であった。これを乱す法則は何もなかった。宇宙が進化したある段階で、粒子が隆盛になり反粒子は消滅した。もちろんエネルギーさえ十分あれば、反粒子をつくり出すことができる。コバルト 60 からの γ 線による粒子・反粒子対である電子・陽電子対の生成は、ごく普通に起こる。(A), (B), (C) について概観する。

§3.3.1 力を媒介する粒子

力の場の粒子あるいは力の伝達粒子は、**ゲージ粒子**ともいわれ、すでに §1.3 で示したように 4 種類ある。力をおよぼすものとおよぼされるものとの間で、あたかも花粉を運ぶ蜜蜂のように振舞う粒子が**媒介粒子**である。花粉に種類があるように、伝達する力も 4 種

第 3 章 素粒子を分類する

類ある。これらの粒子の性質を表 3.1 に示す^{*1}。

表 3.1: 媒介粒子ならびにヒッグス粒子

相互作用	媒介粒子	質量 (GeV/ c^2)	電荷 (e)	スピン (\hbar)
強い相互作用	グルーオン (g)	0	0	1
電磁相互作用	光子 (γ)	0	0	1
弱い相互作用	W ボソン (W^+, W^-)	80.41	+1, -1	1
	Z ボソン (Z^0)	91.19	0	1
重力相互作用	グラヴィトン (G)	0	0	2
質量を与えた 名残りの粒子	ヒッグス (H^0)	125.5	0	0

§3.3.2 物質を形成する粒子

物質は、その安定性から**パウリの排他律**が支配するフェルミ粒子からなっていなければならない。この粒子族は大別するとクォークとレプトンに分けられる。クォークは強い力、および弱い力に感じ、電荷をもつので電磁力にも感応する。レプトンは弱い力を感じる事ができる。電荷をもっているものは電磁相互作用にも関与する。

3.3.2.1 クォーク

強い相互作用をする粒子は、すべてクォークから成り立っている。陽子や中性子も 3 つのクォークの複合粒子である。したがって、クォークの電荷は $+\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ の「はんぱ電荷」をもっている。クォークの種類は、6 種類あることが知られている。すなわち、**アップ**、**ダウン**、**ストレンジ**、**チャーム**、**ボトム**、**トップ**

^{*1} 補遺：ヒッグス粒子質量は 2012 年の CERN にある加速器 LHC による実験の結果。

§3.3 粒子の役割はどうか

(u, d, s, c, b, t) であり、これらは正負の 2 種類の電荷をもつものに分けられる。さらに u, d などの種類の違いを**フレーバー** (flavor) という。

また、これらは相互作用上 2 つずつ対になって振舞う。2 つずつのペアは、 $(u, d), (c, s), (t, b)$ であり、このペアになった組のことを**世代** (generation) という。 (u, d) が第 1 世代、 (c, s) が第 2 世代、 (t, b) が第 3 世代である。

クォークの一覧表を表 3.2 に示す。

表 3.2: クォーク一覧

クォークの フレーバー	記号	電荷 (e)	B	質量 (GeV/c^2)	スピン パリティ J^P (\hbar)	I
アップ	u	2/3	1/3	$(1.5 \sim 4) \times 10^{-3}$	$(1/2)^+$	1/2
ダウン	d	-1/3	1/3	$(4 \sim 8) \times 10^{-3}$	$(1/2)^+$	1/2
チャーム	c	2/3	1/3	1.15 ~ 1.35	$(1/2)^+$	0
ストレンジ	s	-1/3	1/3	$(80 \sim 130) \times 10^{-3}$	$(1/2)^+$	0
トップ	t	2/3	1/3	172.0 ± 2.2	$(1/2)^+$	0
ボトム	b	-1/3	1/3	4.1 ~ 4.9	$(1/2)^+$	0

B : 重粒子数, I : アイソスピン

クォークは強い相互作用をする粒子である。陽子や中性子、パイ中間子などはクォークの複合粒子であり、それらを総称して**ハドロン** (強粒子; hadron) という。ハドロンには**重粒子** (baryon), **中間子** (meson), **共鳴粒子** (resonance) がある。

クォークを q (文字 q は (u, d, s, c, b, t) いずれかを意味する) と表すと、ハドロンには 3 つのクォークから成るものがあり、これを (qqq) と表す。この系の重粒子数は、 $1/3 \times 3 = 1$ となることが

第3章 素粒子を分類する

表 3.2 からわかる。このハドロンを**重粒子**という。これはスピンの $(1/2) \times 3 = \text{半整数}$ である。重粒子のスピンの半整数であるのでフェルミオンであり、物質を構成することができる。当然、**反重粒子**も存在する。反クォークを \bar{q} と表すと反重粒子は $(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ となる。反クォークの重粒子数は $-1/3$ なので、反重粒子の重粒子数は -1 である。

重粒子は**核子** (nucleon) と**超核子** (ハイペロン; hyperon, hyper-nucleon) に分類できる。ハイペロンには、 Λ , Σ , Ξ などがある。核子は u, d クォークのみできていて、超核子はさらに s クォークを含む。

次に $(q\bar{q})$ の組を考えてみると、これはスピンの $(1/2) \times 2 = \text{整数}$ であるのでボーズ粒子である。したがって、直接物質を作ることはできないが、強い相互作用をする粒子である。 $(q\bar{q})$ の組成の粒子を**中間子**という。中間子の名称は、 π 中間子のように、質量が核子と電子の中間にある粒子群の意味であったが、現在では B や Ψ のように、 $(q\bar{q})$ 組成ではあるが核子より重い中間子もあるようになった。

まとめると

重粒子	バリオン	(qqq)
反重粒子	反バリオン	$(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$
中間子	メソン	$(q\bar{q})$

となる。単独のクォークは見つかっていないし、 (qq) や $(qqqq)$ の組み合わせは、現実の粒子は無色でなければならないというカラーの視点から排除される (§11.2 で述べる)。

クォークの種類によって、いくつかの組み合わせがあり、ハドロ

ンの多様性が理解できる。

共鳴粒子は、寿命が極端に短い粒子である。 $\Delta(1232)$ の寿命はおよそ 10^{-23} s である。 $\Delta(1232)$ の 1232 は、質量が $1232 \text{ MeV}/c^2$ の意味である。この粒子は、たとえば陽子に π^+ ビームを当てて、 (π^+p) 系の全エネルギー E によって散乱の起こる頻度を調べると、あるエネルギー E_0 で散乱の起こる頻度が極めて大きくなることがわかり、これは

$$\pi^+p \rightarrow (\Delta) \rightarrow \pi^+p \quad (3.14)$$

のように、 E_0 での中間状態を経由したもので、 E_0 に相当する質量の粒子が創られ、すぐ崩壊して π^+ , p になったものである。上式の場合は、質量とその幅が

$$m = 1232 \text{ MeV}/c^2, \quad \Gamma = 115 \text{ MeV} \quad (3.15)$$

の Δ^{++} である。 Γ の幅が生じるのは

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (3.16)$$

の式で、 $\Delta t \approx 10^{-23}$ s から生じるものであり、 ΔE がかなり大きな値になった結果である。共鳴状態は、創られつつ壊れていく粒子といってもよい。共鳴状態は数が多く、いまだに発見されつつある。

3.3.2.2 レプトン

電子やニュートリノは強い相互作用はしない。電荷をもつものは電磁相互作用もするが、本質的には弱い相互作用にあずかり、大き

第 3 章 素粒子を分類する

さをもたない点状粒子と考えられている。この一族の粒子群を**レプトン**という。「軽粒子」の意味であるが、現在では陽子より重い軽粒子もある。陽子の質量が $938\text{ MeV}/c^2$ に対して、レプトンの τ 粒子の質量は $1777\text{ MeV}/c^2$ もある。レプトンの一覧表を表 3.3 に示す。

表 3.3: レプトン一覧表

レプトン	記号	電荷 (e)	質量 * (MeV/c^2)	寿命 * (s)	崩壊モード
電子	e^-	-1	0.511	安定	
ミュー粒子	μ^-	-1	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
タウ粒子	τ^-	-1	1777	2.9×10^{-13}	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$
電子ニュートリノ	ν_e	0	?	安定?	
ミューニュートリノ	ν_μ	0	?	安定?	
タウニュートリノ	ν_τ	0	?	安定?	

* ニュートリノの質量と寿命は、たとえばミューニュートリノが電子ニュートリノに変わる「ニュートリノ振動」が 1998 年のスーパーカミオカンデの実験で確認され、わかってきた**。

** 補遺：しかし 3 種類あるニュートリノの質量差以外は、それぞれの粒子の質量はまだ決まらない。

レプトンも 2 つずつ対になって**世代**をなす。すなわち

$$(\nu_e, e^-), \quad (\nu_\mu, \mu^-), \quad (\nu_\tau, \tau^-) \tag{3.17}$$

の **3 世代**である。これはクォークの 3 世代と対比される。なお、軽いレプトンが 3 つしかないことが 1989 年の**セルン**（CERN；欧州合同原子核研究所，Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire）の実験で確かめられた (§12.5 参照)。

§3.3.3 クォーク組成によるハドロンの分類

クォークがいくつか組み合わさってできた粒子がハドロンといわれるものであることは前小節 §3.3.2 で記した。クォーク 6 種類、反クォーク 6 種類の組なので、ハドロンの多様性が出てくる。

粒子の分類に関しては、国際的なグループ PDG(Particle Data Group) の記述がある。その中からゲージ、ヒッグスボソンとレプトンに関する部分を除き、クォークが関与する粒子の分類の抜粋を表 3.4 にあげてみよう。その際、次の量子数を使用する。

S : ストレンジ量子数 (s クォークを含む)

C : チャーム量子数 (c クォークを含む)

B : ボトム量子数 (b クォークを含む)

T : トップ量子数 (t クォークを含む)

加えて

I : アイソスピン (荷電状態の違いをスピンになぞらえたもの)

とする。

第 3 章 素粒子を分類する

表 3.4: ハドロニー覧表

軽メソン	$(S = C = B = T = 0)$ $I = 1(\pi, b, \rho, a) : u\bar{d}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}, d\bar{u}$ $I = 0(\eta, \eta', h, h', \omega, \phi, f, f') : c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2s\bar{s}$
ストレンジ・メソン	$(S = \pm 1, C = B = T = 0)$ $K^+ = u\bar{s}, K^- = \bar{u}s, K^0 = d\bar{s}, \bar{K}^0 = \bar{d}s,$ 同様に K^* (エネルギーの高い状態) によるもの
チャーム・メソン	$(S = 0, C = \pm 1, B = T = 0)$ $D^+ = c\bar{d}, D^- = \bar{c}d, D^0 = c\bar{u}, \bar{D}^0 = \bar{c}d,$ 同様に D^* によるもの
チャーム・ストレンジ・メソン	$(S = C = \pm 1, B = T = 0)$ $D_s^+ = c\bar{s}, D_s^- = \bar{c}s,$ 同様に D_s^* によるもの
ボトム・メソン	$(S = 0, C = 0, B = \pm 1, T = 0)$ $B^+ = u\bar{b}, B^- = \bar{u}b, B^0 = d\bar{b}, \bar{B}^0 = \bar{d}b,$ 同様に B^* によるもの
ボトム・ストレンジ・メソン	$(S = \mp 1, C = 0, B = \pm 1, T = 0)$ $B_s^0, \bar{B}_s^0,$ 同様に B_s^* によるもの
ボトム・チャーム・メソン	$(S = 0, C = \pm 1, B = \pm 1, T = 0)$ $B_c^0, \bar{B}_c^0,$ 同様に B_c^* によるもの
$c\bar{c}$ メソン	$\eta_c, J/\psi, \chi_c, h_c, \psi, X$
$b\bar{b}$ メソン	Y, χ_b
N バリオン	$(S = 0, I = 1/2), \quad p, N^+ = uud, n, N^0 = udd$
Δ バリオン	$(S = 0, I = 3/2), \quad \Delta^{++} = uuu, \Delta^+ = uud, \Delta^0 = udd, \Delta^- = ddd$
Λ バリオン	$(S = -1, I = 0), \quad \Lambda^0 = uds$
Σ バリオン	$(S = -2, I = 1/2), \quad \Sigma^+ = uus, \Sigma^0 = uds, \Sigma^- = dds$
Ξ バリオン	$(S = -2, I = 1/2), \quad \Xi^0 = uss, \Xi^- = dss$
Ω バリオン	$(S = -3, I = 0) \quad \Omega^- = sss$
チャーム・バリオン	$(C = +1), \quad \Lambda_c^0 = udc, \Sigma_c^{++} = uuc,$ $\Sigma_c^+ = udc, \Sigma_c^0 = ddc, \Xi_c^+ = usc, \Xi_c^0 = dsc, \Omega_c^- = ssc$
ボトム・バリオン	$(B = -1) \quad \Lambda_b^0 = udb, \Xi_b^0 = usb, \Xi_b^- = dsb, \Omega_b^- = ssb$

§3.3.4 質量の起源となった粒子

ニュートンは、質量をもつものの間で万有引力が働くことを法則化した。それでは質量とは一体何だろうか。質量をもつ物質があるとき、それは媒介粒子である重力子による重力に感应する。質量の大小により感应力の大小が決まる。質量は重力の相互作用の実体である。質量の起源についてはまだよくは解明されていない。エネルギーと質量は等価であるから、たとえば十分なエネルギーをもつ γ 線から電子・陽電子対が発生する場合のように、エネルギーの物質化が起これば質量が生み出される。しかし、この場合どうして電子なのか、すなわち電子の質量であるのか、あるいは電子質量はなぜ $0.5 \text{ MeV}/c^2$ なのか、これに対する答えはまだない。

§3.3.5 ゲージ原理

物理学の原理はさまざまあり、とりわけ相対性原理、量子原理などは本質的で、重要なものである。これに匹敵するものに**ゲージ (gauge) 原理**がある。§3.2 でも述べたように、波動関数の**位相**を変えても物理的には同じであることを根拠にしている。場は波動関数で表せるので、場の位相を変えても物理的には不変である。場を ϕ で表すと、**位相変換**は

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (3.18)$$

と表すことができる。ただし、 α は定数である。これを**大域的ゲージ変換**という。時間を t 、空間座標を x, y, z 、光速を c と表し座標

第 3 章 素粒子を分類する

を $x = (ct, x, y, z)$ とする。時空の各点での位相変換

$$\phi' \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi \quad (3.19)$$

を**局所ゲージ変換**という。ここで、 $\alpha(x)$ は時空の各点の関数である。ゲージ原理とは、「運動方程式は、時空の各点での任意の位相変換に関して形が変わらない」というものである。「局所ゲージ変換に対して不変であること」これが宇宙の原理である。運動を記述する式はそうになっているべきであるという主張である。電磁場もゲージ場である。強い力、弱い力を作る場もすべてゲージ場である。

§3.3.6 質量はヒッグス機構とともに

物質の質量は、どのようにして生み出されたのだろうか。ビッグバンからおよそ 10^{-35} 秒までの間は、すべての素粒子の質量はゼロであったとされる。種々の対称性も成り立っていた。宇宙が膨張して冷えるにしたがってこれが破れてきた。粒子が質量を得た第一番目の過程は、**ヒッグス機構**といわれるものであった。1964 年、ヒッグス (P. W. Higgs) が質量獲得のメカニズムを明らかにした。詳細は §16.5.2 で述べる。シナリオは次のようである。宇宙にはボーズ粒子である**ヒッグス粒子**があり、それは**ヒッグス場**というスカラーで表せる場を作っている。

スカラー場の量子数は真空と同じである。さらにヒッグス粒子は、自分自身が作る場に自己相互作用をし、自分の作るポテンシャルに感応できる。そしてもう一つ、ヒッグス粒子は他の粒子と相互作用をする。この相互作用は前に述べた 4 種類のものとは異なった新

§3.3 粒子の役割はどうであるか

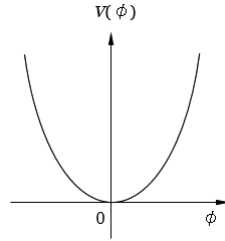


図 3.1: スカラーポテンシャル

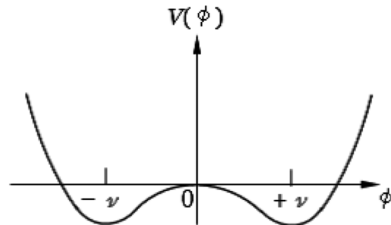


図 3.2: ヒッグスポテンシャル

しい力である。

スカラーボソンのポテンシャル $V(\phi)$ が図 3.1 のような場合には、 $\phi = 0$ が最低点で、これが真空になり、特筆するようなことはない。しかし、 $V(\phi)$ が ϕ について 4 次式であり、図 3.2 のような場合には様子が異なる。この場合の $\phi = 0$ である真空は、不安定な真空であり、よりエネルギーが低い $\phi = +v$ または $\phi = -v$ の状態に落ちてしまう。どちらかの状態にあるとき、これはもはや対称な位置ではない。

第 3 章 素粒子を分類する

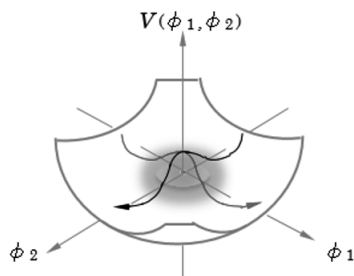


図 3.3: 自発的対称性の破れ

次に図 3.2 で V の周りに回転したものを考える。これが図 3.3 である。ポテンシャルは、2 つのスカラー場 ϕ_1, ϕ_2 によるものとする。それまで自由に飛び回っていたヒッグス粒子は、宇宙が冷えていくとともに宇宙空間に凝縮し、真空を満たした。すると、ヒッグス粒子の作るポテンシャルは、図 3.3 に示すように、ワインボトルの底のように中央部が盛り上がって、ポテンシャルエネルギーが 0 の部分と、周囲にそれより低い部分ができる。中央部の盛り上がったところは不安定な真空であって、少しの揺らぎで、周辺のエネルギーが低いところに落ち込んでしまう。このとき低い部分のどこであるかをいうことはできないが、いったん落ち込んだところが新たな真空になる。

ところがこの真空状態は、ワインボトルの底の片隅なので、もはや対称な位置ではなくなる。不安定なワインボトルの中央部の真空は、どこを見渡しても対称であったのに、いったん転げ落ちて底のどこかに落ちてしまうと、底は安定であるが非対称な状態になる。自然に落ち込んで、安定であるが対称性がない真空である。すなわ

§3.3 粒子の役割はどうであるか

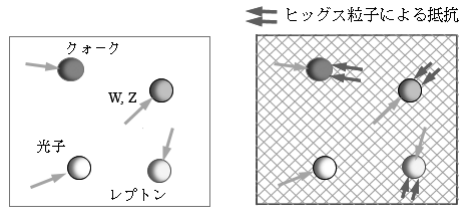


図 3.4: ヒッグス凝縮により粒子に質量発生

ち、現在の我々是对称性が破れた真空にいることになる。この現象を**自発的対称性の破れ**という。

ヒッグス粒子がぎっしり詰まった場の中を、質量のない粒子が光速で進行して行くとき、粒子はいたるところでヒッグス粒子と相互作用をし、あたかも水中を進む物体が水の抵抗を受けて遅くなるように、粒子の速さが光速より遅くなる。粒子の速さが光速より遅い、すなわち粒子は質量をもったことになる！詳しいことを除けばこれが「ヒッグス機構」である。

ゲージ場の媒介粒子である**ウィークボソン** W, Z はこのようにして質量をもつことになる。クォーク、レプトンも同様にして質量を得た。ただし、光子はヒッグス粒子と相互作用をしないので、質量は0のままである（図 3.4）。

陽子や中性子もクォークからできているので、これらの質量はクォーク 3 個分の質量を加えればよいかというところはいかない。これは次に述べる別のメカニズムで質量が生じた。



図 3.5: カイラル対称 (a) 左右の手 (b) 粒子の場合

3.3.6.1 カイラル対称性の破れ

スピンをもつ粒子が右巻きであるか左巻きであるかを識別するとき、右に対しては左という概念は「対称」な概念であるといい、この対称性を**カイラル対称性**とよぶ。

カイラルまたはキラル (chiral) とはギリシャ語の手の意味で、右手と左手の区別ができることを表す。対掌性ともいう。キラル分子は鏡像異性体である。常に光速で進む粒子にとっては、それ以上の速さで進む粒子はないので、右巻き左巻きは粒子に固有の性質である。

カイラル対称性は、光速で進む粒子のみにある性質である。光速で進む粒子の質量はゼロであるので、カイラル対称性は質量をもたない粒子に対してだけに成り立つ概念である。

質量をもつ粒子の場合には、決して光速で進むことはできない。光速より遅い速さで進んでいる右巻きの粒子を、それより速い速さで進む粒子から見ると左巻き粒子に見える。左巻き粒子は右巻き粒子になる。右巻き、左巻きは観測者によってどちらにもなるので、粒子に固有の量ではなくなる。質量があるということは、右巻きと

左巻きが一緒になっているものと考えることができる。このときにはカイラル対称性はない。

ビッグバンで発生した宇宙の温度が下がると、強い力で結びついてクォークと反クォークのペアができ、これがぎっしりと宇宙空間を満たした。クォーク、反クォークともスピン $1/2$ なので、このペアのスピンが 0 または 1 のボーズ粒子として振る舞う。低温なので、**ボーズ・アインシュタイン凝縮**といわれるクォーク凝縮が起こった。これは、真空状態のひとつであり、その結果、光速で動き回ることはできず、カイラル対称性は自然に破れた。カイラル対称性の自発的破れになる。

クォーク・反クォーク対でびっしり満たされた宇宙こそ新しく定義された「**真空**」といえる。ちなみに、クォーク・反クォーク対の量子数はゼロで本来の真空と同じである。これは、超伝導の場合の**クーパー (L. Cooper) 対**に酷似している。さらに、**クーパー対**を作る逆向きスピン対の電子は、大きな実効質量をもつ。また、クォーク対も同様に質量を得ることができた。クォーク・反クォーク対が凝縮した中をクォークでできたほかの粒子が進む場合、その粒子は凝縮したクォーク対から力を受けて進むのに抵抗を受ける。これは、粒子が質量をもつことと同じことである。

こうして、**クォーク・反クォーク対が凝縮**し、カイラル対称性の自発的破れによる**量子色力学 (QCD)** の効果によってさらに質量を得ることが、最近のコンピュータシミュレーションで示された。

クォークが質量をもつ原因は2段階あり、最初はヒッグス機構、次はカイラル対称性の自発的破れである。陽子や中性子などの構成要素であるクォークの質量はヒッグス機構によるもので、これは比

第 3 章 素粒子を分類する

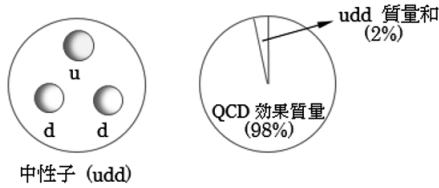


図 3.6: 中性子の質量の起源

較的小さく陽子や中性子の質量の 2%を与え、この小さな質量を基にしたカイラル対称性の自発的破れによるものは 98%になる。これがスーパーコンピュータによる QCD のシミュレーションの結果である。

3.3.6.2 物質の質量

このように、ある場の対称性が破れると、それまで質量をもたず光速で運動していた粒子が対称性の破れによってその場との相互作用を引き起こし、運動が減速される。すなわち、粒子が質量をもつという別の例を前に記した。それは、素粒子の相互作用の本質的な場である**ゲージ場**の対称性が自発的に破れ、その結果としてゲージ場が質量をもち、それが W や Z 粒子として出現した。また、**ヒッグス場**において、宇宙が冷えるとともにヒッグス粒子が凝縮し、飛び交う粒子に抵抗を与える。すなわち、粒子が質量をもつことになった。前述したように、クォークが**ヒッグス機構**から得る質量は小さく、クォーク 3 個でできた陽子や中性子の質量の大部分は、第 2 ステージの QCD 効果によるものであり、ヒッグス機構からの質量が種になっている。

第 4 章

相対論のはじめ

素粒子反応は、極微の世界の現象で、より小さなものにはより高いエネルギーが関与する。高エネルギー、すなわち超高速の物体の運動は、アインシュタインの特殊相対性理論を抜きにしては論じることができない。粒子の速度が速くなると時間の遅延や空間の収縮が起こり、エネルギーや運動量などの物理量なども、ニュートンの力学からのずれの量が大きくなっていく。これらを簡潔にまとめてみる。加えて、古典力学も振り返ってみよう。

4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

我々地上にいるものにとって、真上から降り注ぐ雨は、ある速さで進行している列車の中の人にとっては、斜めに降り注ぐように見える。一つの現象がまったく異なった現象に受けとられる。これはなぜなのだろうか。

異なる座標系での物理情報を伝達する際に、最初に必要となるのは、座標の間の変換則である。1905 年のアインシュタインの**特殊相対論**の登場まで、**ガリレイ (G. Galilei) 変換**が唯一正しい変換とされてきた。しかし、特殊相対論（特殊相対性理論）により、古典的なガリレイ変換が成り立つのは、座標系の間相対速度が低速の場合の近似式であることが示され、真の変換則は、**ローレンツ変換**

第4章 相対論のはじめ

といわれるものになった。古典論の問題点をあげ、真の正しい変換則を導いてみよう。

§4.1.1 ガリレイ変換

1687年に、**アイザック・ニュートン** (I. Newton) は、著書プリンキピアで力学の諸法則を記述した。そのなかに、運動の第一法則の部分がある。それは、**慣性の法則**とも呼ばれている。この法則は「外部から何の力も働かないとき、質点は静止または等速度運動をする」というものである。ここで、この法則を取り上げたのは、慣性系について述べたいからである。慣性系とはいかなるものか。それは、慣性の法則が成り立つ系のことをいう。それでは、慣性の法則が成り立つ系とは何であろうか。それは、**慣性系**という。どうどう巡りである。このことから開放されるには、「互いに等速度運動をしている無数の座標系のことを慣性系という」という表現にすればよい。これを一歩進めたのが**ガリレイの相対性原理**といわれるもので「互いに相対的に並進運動をしている無限に多くの系（慣性系）が存在し、これらの系での力学の法則は、形が変わらない」と表現される。

異なる座標系の間の座標変換則が正しいかどうかは、何で判断したらいいのだろうか。

古典論としては、唯一ニュートンの運動方程式の形が変わらないことを要請する以外にない。点 P である事象が起きたとする。

図 4.1 に示すように、ある慣性系 S では、空間座標 r と時刻 t

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

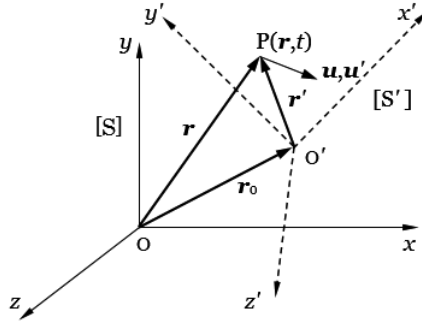


図 4.1: 慣性系 S と慣性系 S'

で, 1 つの事象

$$(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t) \quad (4.1)$$

が起こり, S 系に対して等速度 v で動いている別の慣性系 S' では, この事象を点

$$(\mathbf{r}', t') = (x', y', z', t') \quad (4.2)$$

で観測されるものとする。 $t = t' = 0$ で, S, S' 系のそれぞれの原点 O, O' は一致するものとする。

ニュートン力学では, 時間の絶対性から

$$t = t' \quad (4.3)$$

である。 O を基点とする O' の位置ベクトル \mathbf{r}_0 は, 時間 t の間に速度 v で移動しているので

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t \quad (4.4)$$

第4章 相対論のはじめ

である。図 4.1 より、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \quad (4.5)$$

または

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t \quad (4.6)$$

でありこれを**ガリレイ変換**という。

次に、点 P にある質点が、 S 系では速度 \mathbf{u} で、 S' 系では \mathbf{u}' で運動しているときを考える。ガリレイ変換 (4.6) において、両辺を t で微分して、速度に直す。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{v} \quad (4.7)$$

これより、 S 系での質点の速度 \mathbf{u} と、 S' 系の速度 \mathbf{u}' とは

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \quad (4.8)$$

の関係がある。これを**速度の合成則**という。

さらに微分して加速度に直すと、 \mathbf{v} は一定なので微分すれば $\mathbf{0}$ であるので

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} \quad (4.9)$$

が得られ、慣性系では、どちらの座標系でも加速度が等しく、加速度は座標系の取り方によらないことを示している。加速度を \mathbf{a} と表すと

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (4.10)$$

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

であり、さらに質点の質量 m とこれに働く力 F は座標系によらず不変であるので、 S 系でのニュートンの運動方程式

$$F = ma \quad (4.11)$$

は、 S' 系では

$$F' = ma' \quad (4.12)$$

であるが、 $F' = F, a' = a$ から、どちらの系でも

$$\text{力} = \text{質量} \times \text{加速度} \quad (4.13)$$

となっている。したがって

ニュートンの運動方程式は、ガリレイ変換に対して形が変わらず、不変である

ことがいえる。このことから、古典論では、 S 系と S' 系は、力学的に同等であると結論づけられる。

ニュートンは、時間と空間に対して、それらが絶対的で、他の対象が何であれ、対象に無関係に存在すると主張した。時間は何ものにも左右されず、一様に流れていき、空間はいついかなる場合でも、常に同じものであり、不動のまま存在し続ける。時間は、事件を記述するものであり、それは、何ものにも影響されず、連続、無限、一様、いたるところ同質である。空間は物質の入れ物であり、他の対象に無関係に存在し、物質からは作用を受けず、空虚、静止、無限、一様であり、ユークリッド幾何学的である。時間と空間は、まったく独立に存在し、それぞれ絶対的なものである。

第4章 相対論のはじめ

ニュートンの運動方程式が不変になる変換は、正しい真の変換であるのか。20世紀はじめ、ガリレイ変換は、座標系の速さが遅い場合に成り立つが、座標系の速さが速くなるか、扱うものの速さが速くなると、破綻をすることがわかり、これに代わるものが、1905年にアインシュタインの特殊相対論の中で得られた。

§4.1.2 真の変換は何であろうか

アインシュタインの特殊相対論の出現直前までにわかっていたことは、

- (i)ガリレイの相対性原理
- (ii)速度の合成則
- (iii)光速不変

であったが、(iii)は(ii)に反する^{*1}。

アインシュタインの選択は、(i)と(iii)を原理とした。このため、ガリレイ変換を捨て、基本的にはニュートン力学も捨てることになった。

§4.1.3 アインシュタインの特殊相対性原理

- (I)あらゆる物理法則は、すべての慣性系で同一の形をとる
- (II)光速は、すべての慣性系で同じ値をとる

これが特殊相対性原理といわれるものである。(I)は**相対性の要請**といわれ、それまで、どこかにあると信じられていた絶対運動・絶

*1 その時点まで議論になったエーテルの概念とも両立できない。

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

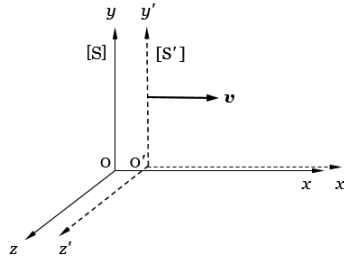


図 4.2: 慣性系 S と S' の関係

対静止系を否定した。ある絶対的なものだけを特別なものとするときには、(I) に反する。この原理に「特殊」がついたのは、慣性系のみを対象としているからである。(II) は補足仮定で、**光速不変の原理**とも呼ばれる。光は、真空中を一定の速さで伝わり、光源の運動には無関係である。これらが正しいかどうかは実験によることになる。

時間 t と 3 次元空間座標 x, y, z からなる系を考え、 S 系を (t, x, y, z) と表す。簡単のため、図 4.2 に示すように、 S 系に対して x 方向に速さ v で動いている S' 系があるとする。 S' 系の座標軸 (t', x', y', z') は、 S 系の x, y, z の向きと同じ方向とし、 S 系と S' 系の原点である O, O' は、 $t = t' = 0$ で一致するものとする。

§4.1.4 ローレンツ変換

2 つの系で、時間を含む座標の間の真の関係は、古典論でいうガリレイ変換ではなく、ローレンツ変換である。このことを考えよう。点 P での事象が、 S 系では、座標 (t, x, y, z) で、 S' 系では、座標 (t', x', y', z') で起こったものとする。光速が一定となるような、 S

第 4 章 相対論のはじめ

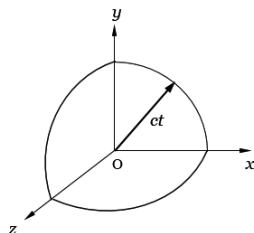


図 4.3: S 系の原点から出た光は球面状に広がる。

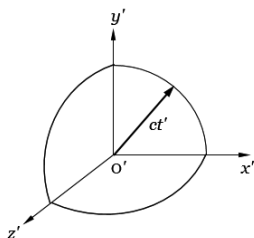


図 4.4: S' 系の原点から出た光も球面状に広がる。

系と S' 系間の変換則を求める。〈 談話 2：時空の関係 〉で、ローレンツ変換といわれるものを導いてみよう。

$t = t' = 0$ ，すなわち， O, O' が一致したときに， S 系の原点に固定した光源から光のパルスを出す。パルスにしたのは，ある時間経過すると，光が 3 次元空間のどのような面上にあるかを知りたいからである。一様な空間であるから， S 系では O から球面上に広がる。時間 t がたったときの光は，図 4.3 に示すように，光の速さを c として，半径 ct の球面になる。すなわち，光の面は式 $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ を満たす。

一方， S' 系でも光速不変の原理から，光速は c で，図 4.4

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

に示すように、光の広がる面は球面になる。したがって $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$ が成り立つ。よって

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (4.14)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (4.15)$$

である。この 2 式は、一般に A を任意の定数として

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2) \quad (4.16)$$

と表すことができる。ここで、 $y = y', z = z'$ としたので、 $A = 1$ である。したがって、

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (4.17)$$

が成り立つ。 S, S' 系のように、異なった座標系でも $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ は値が変わらない不変量になる。

変換則は、2 つの座標系で 1 対 1 の事象となるように座標の 1 次式である必要がある。簡単のため $y' = y, z' = z$ として (x, t) と (x', t') の関係を求める。変換式を

$$x' = \gamma x + \delta t \quad (4.18)$$

$$t' = \epsilon x + \eta t \quad (4.19)$$

とおき $\gamma \sim \eta$ を光速不変の原理 (4.17) を用いて決定しよう。 $y' = y, z' = z$ としているので (4.17) は

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (4.20)$$

第4章 相対論のはじめ

と表すことができる。次に、 S' 系の速さ v' の効果を考える。 S' 系の原点 O' は、 S 系からみると $x = vt$ の運動をしている点である。これを(4.18)に代入して

$$x' = \gamma x + \delta t = t(\gamma v + \delta) \quad (4.21)$$

である。 S' 系の原点 O' は $x' = 0$ であるから

$$\gamma v + \delta = 0 \quad (4.22)$$

が成り立つ。まとめると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \delta t \\ t' &= \epsilon x + \eta t \\ x^2 - (ct)^2 &= x'^2 - (ct')^2 \\ \gamma v + \delta &= 0 \end{aligned}$$

であり、これより $\gamma, \delta, \epsilon, \eta$ が求められる。

詳しい計算は〈談話2〉に回そう。あらためて光速に対する速さを β 、**ローレンツ因子**を γ 、すなわち

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.23)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.24)$$

として, x', y', z', t' は

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{4.25}$$

と表すことができる。逆変換は, S' 系に対する S 系の速さが $-v$ であるから, 上式で $\beta \rightarrow -\beta$ として

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{4.26}$$

としても得ることができる。

もともとローレンツ変換は, **ローレンツ** (H. Lorentz) が電子論を展開する際に導入し, そこでの場の方程式の形が変わらないようにするためのものであった。空間の収縮を仮定し, 有効座標といわれる x', y', z' と局所時 t' を数学的な概念として導入した。これらの式は, 物理的な意味合いはなかったが, 後年アインシュタインが相対論から導いたものに等しいものである。**ポアンカレ** (H. Poincaré) が, これらの式は群を形成することを示し, これをローレンツ変換と称した。この名称は, アインシュタインまで引き継がれることになる。

このローレンツ変換の式から, 次の重要な事項が導かれる。

§4.1.5 ローレンツ・フィッツジェラルドの短縮

——運動する物体の長さ——

S 系に長さ $\ell = x_b - x_a$ の棒が、系に対して静止状態にあったとする。これを**静止長**、または**固有の長さ**という。速さ v で動いている S' 系でこの棒の長さを測ると、動いている棒の長さの測定は、同時刻に棒の両端の座標を決めることであるから、ある時刻 t' に同時に x'_a, x'_b を定め

$$\ell' = x'_b - x'_a \quad (4.27)$$

を棒の長さとする。 S 系での座標はローレンツ変換 (4.26) より

$$x_a = \gamma(x'_a + vt'), \quad x_b = \gamma(x'_b + vt') \quad (4.28)$$

であり、棒の長さは

$$\ell = x_b - x_a = \gamma(x'_b - x'_a) \quad (4.29)$$

になる。棒と一緒に動いている S' 系での長さ ℓ' は、この系での静止長である $\ell' = x'_b - x'_a$ になる。ローレンツ変換より

$$\begin{aligned} \ell' = x'_b - x'_a &= \frac{\ell}{\gamma} \\ &= \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot \ell \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\ell' \leq \ell$ (等号は $v = 0$ のときで $\gamma = 1$) である。したがって、 S' 系からみた S 系に固定された棒は、 S' から観測すれば $-v$ で運動しているが、静止時の長さより短い。

§4.1 ガリレイ変換とローレンツ変換

静止している物体の長さ（固有の長さ） ℓ_0 は、速さ v で運動すると、運動の方向に

$$\ell = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot \ell_0 \quad (4.30)$$

に短縮する。これをローレンツ・フィッツジェラルド (G.F.Fitzgerald) の短縮という。

§4.1.6 時間の遅れ

運動していないときには、すべての時計は合っているとする。 S 系に比較用の時計を並べておき、 S 系の観測者が通過してゆく S' 系の時計と比較する。観測者に対して v の速さで運動している S' 系の一つの時計に着目する。この時計は、位置 x' に置かれているものとする。

S' 系の一定の場所 x' にある時計が t'_1 から t'_2 の時刻を示したとき、 S 系ではこの時計は運動しているので、別々の場所にある時計の時刻 t_1, t_2 に相当する。よって、ローレンツ変換より

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta}{c} x' \right) \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{\beta}{c} x' \right) \quad (4.31)$$

が成り立つ。 S 系の観測者にとって、 $t_2 - t_1$ は、観測者に対して運動していない時計の示す時刻で**固有時** τ_0 といわれる。上式から

$$\tau_0 = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) \quad (4.32)$$

S' 系での時間を $t'_2 - t'_1 = \tau$ とすると上式は

$$= \gamma \tau \quad (4.33)$$

第4章 相対論のはじめ

になる。したがって、 $\tau_0 \geq \tau$ (等号は $v = 0$ のとき) である。これは、観測者に対して運動している時計の示す時間は、固有時より短い、すなわち時間がたたないことを意味している。このことから、時間に関する重要な帰結が得られる。

運動している時計は、静止している時計に比べると遅れる。その値は次で与えられる。

$$\tau = \frac{\tau_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \tau_0 \quad (4.34)$$

言葉を変えていえば、我々が時計をもっていて、そこで測る時間 τ_0 は、運動している時計の示す時間 τ の γ 倍である。

寿命が τ_0 で崩壊する物体があった場合、速く運動すると時間が遅れ、物体の時間が τ_0 たって壊れるまでに、観測者が観測する時間 τ は、物体の示す時間 τ_0 の γ 倍であって

$$\tau = \gamma \tau_0 \quad (4.35)$$

と表され、これは寿命が γ 倍に延びたことになる。

例として、**ミュー粒子の崩壊**をあげよう。素粒子の一つであるミュー粒子は、平均寿命が $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ で壊れて、電子、反電子ニュートリノ、ミューニュートリノになる。崩壊式は

$$\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (4.36)$$

である。ミュー粒子が、仮に光速の 99.99% の速さで飛行すると、**寿命の延び**がないとしたときの飛行距離は

$$\ell = v\tau_0 = c\beta\tau_0 = 3.0 \times 10^8 \times 0.9999 \times 2.2 \times 10^{-6} \approx 660 \text{ m} \quad (4.37)$$

である。ところが、時間は

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 0.9998} = 0.01 \quad (4.38)$$

倍となり τ_0 までの時間はなかなかたらず、観測者が観測する寿命は

$$\tau = \gamma \tau_0 = 100 \times 2.2 \mu\text{s} = 220 \mu\text{s} \quad (4.39)$$

となる。仮に速さをほぼ光速 c とすれば、粒子がこの時間に飛行する距離は

$$\ell \cong c\tau = 6.6 \times 10^4 \text{ m} \quad (4.40)$$

となって、距離は寿命の延びがないとしたときの距離の 100 倍も遠方まで進むことになる。

ただし、これは観測者から見た時間であって、粒子にとっての寿命はあくまでも τ_0 である。

4.2 4 元ベクトル

ローレンツ変換が真の座標変換であり、この変換則により、あらゆる慣性系で物理法則は同じ形をとること——ローレンツ不変性が要求される。

時間座標を t 、空間座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする。時間と空間という異なった物理量のため、光速を c とすると、 ct は長さの次元になるので、4 次元ベクトル、または一般の呼び名を「4 元ベクトル」

第4章 相対論のはじめ

として

$$\begin{aligned}x &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \\ &= (ct, \mathbf{r})\end{aligned}\quad (4.41)$$

を定義する。1つの事象は、いつ、どこで、を指定すれば、すなわち、 (x^0, \mathbf{r}) をいえば事象は決まる。

§4.2.1 斜交座標系

ローレンツ変換は以下で示すように、斜交座標系で図示できる。簡素化のため、2次元表示 (ct, x) とする。

図4.5に S 系と S' 系を示す。 S' 系において、 ct' 軸は、 $x' = 0$ の軌跡であるので、ローレンツ変換より

$$x' = 0 = \gamma(x - \beta ct) \quad (4.42)$$

$$\therefore x = \beta ct = \frac{v}{c} \cdot ct \quad (4.43)$$

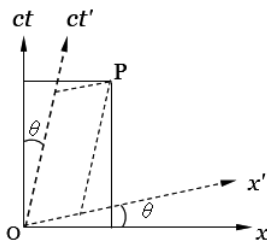


図 4.5: 斜交座標系で表されるローレンツ変換

$$\tan \theta_1 = \frac{v}{c} \quad (4.44)$$

また, x' 軸は, $ct' = 0$ の軌跡であるから

$$ct' = 0 = \gamma(ct - \beta x) \quad \therefore \quad ct = \beta x = \frac{v}{c}x \quad (4.45)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{v}{c}, \quad \therefore \quad \theta_1 = \theta_2 \equiv \theta \quad (4.46)$$

である。 S 系に対して v の速さで運動している S' 系は, S 系の ct 軸から $-\theta$, x 軸から θ だけ傾いた「斜交座標系」で表される。ただし, $\tan \theta = v/c$ である。

§4.2.2 世界線

簡単のため, t と x のみの関係で表し, $x = f(t)$ を (ct, x) 平面上に図示する。図 4.6 (a) は, 原点から x の正方向に, 速さ v で運動しているものの軌跡を表す。 ct 軸とのなす角 θ は $\tan \theta = v/c$ である。光の場合は $v = c$ であるから, 同図 (d) にあるように $\tan \theta = 1$ となり, $\theta = 45^\circ$ の直線になる。(b) は加速運動, (c) は

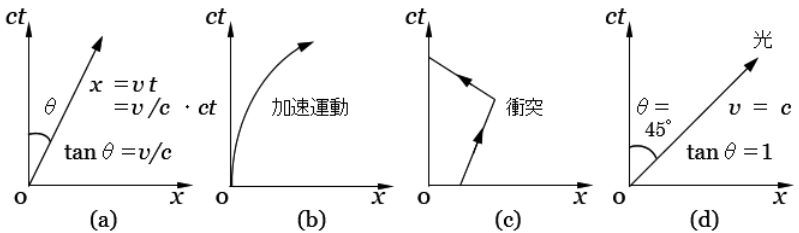


図 4.6: いろいろな運動

第4章 相対論のはじめ

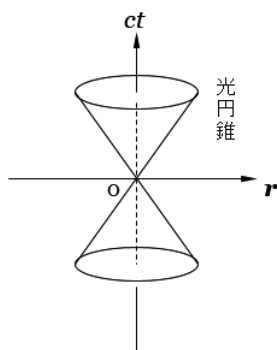


図 4.7: 空間を 2 次元平面で表し、これに垂直に時間軸をとると、光は O を頂点とする円錐面上を進む。

定速で運動をしているものが衝突して逆方向に動いて行くものを表している。(a) から (c) までの図は、列車ダイヤに酷似している。

ある場所と時間の一点で一つの事象を表し、この点を**世界点**とよび、世界点が連続したときの軌跡を**世界線**という。 (ct, r) で表される 4 次元空間で、原点 O に集まり、 O を通過して行く光の集合は、図 4.7 に示すように、円錐面になるので、光の世界線の集まりを**光円錐**という。

ある時刻での光円錐上の各点は、 r 軸に平行な平面の円の上であり、すぐ後で述べるが、光円錐の内側で生じる事象は、因果律が成り立つ世界である。すなわち、原因となる事象が原点で生じ、その結果となる事象が光円錐の内側で生じる。原点で起こった事象とその結果としての事象とは、明らかに光速よりも遅い信号で結ぶことができる。

x, y 平面と垂直に ct 軸とする。図 4.8 に示すように、 xy 平面上

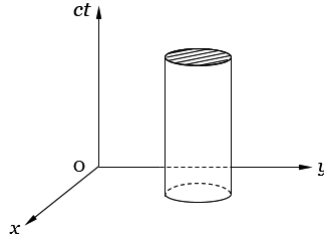


図 4.8: 時空連続体 2 次元平面の円は時間軸方向に引き伸ばされた円柱

に色紙を切り抜いた円が固定されていて、 (ct, x, y) の 3 次元では、この円が ct 軸方向に引き伸ばされて円柱となる。 S 系と S' 系との関係を見てみる。 S 系では直交座標系であったものが、 S' 系では斜交座標系となり、 x 方向だけがローレンツ・フィッツジェラルドの短縮を受ける。したがって、 S 系では切り口が円となる円柱が、 S' 系では切り口が楕円になる。

実際の物体で実在するのは、軟体動物のような**時空連続体**であり、我々が認識できるのは時空連続体の空間軸への射影、あるいは時間軸への射影だけである。このように、空間と時間が融合されたものを**世界**という。

点 $P(0, 0, 0, 0)$ と点 $Q(ct, x, y, z)$ の距離の 2 乗

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.47)$$

を 2 点の**世界距離**の 2 乗という。

簡単化のため、4 次元時空を (ct, x) の 2 次元平面で表す。原点

第 4 章 相対論のはじめ

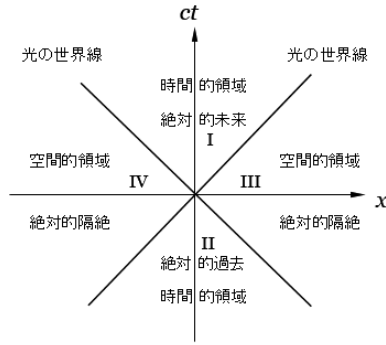


図 4.9: 光の世界線により 4 つの領域に分けられる。

を通る 2 本の光の世界線

$$ct = x \quad \text{と} \quad ct = -x \quad (4.48)$$

によって時空は 4 つの領域に分けられる。これを図 4.9 に示す。

[I] $t > 0, s^2 < 0$

この領域の事象は、時間が正であることから、常に原点より未来に起こることなので、この領域のことを**絶対的未来領域**という。 $s^2 < 0$ であるから、時間の項の方が空間の項より大きさが大きいので、この事象を**時間的 (time like)** という。図 4.10 に示すように、点 P での事象と原点の事象との関係は、または、光速以下の信号で伝わる事象はどのような S' 系をとっても、この領域の中で起こる。因果律が成立する領域でもある。

[II] $t < 0, s^2 < 0$

絶対的過去で時間的な領域である。因果律が成立。

[III] $t > 0, s^2 > 0$

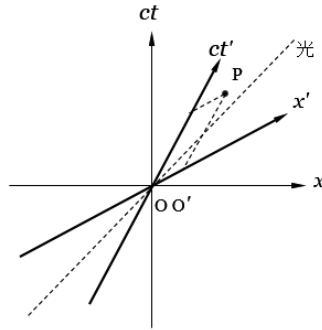


図 4.10: 絶対的未來領域 光円錐の内側の事象は 系のとり方によらず、原点より未來の事象になる。**因果律**が成立

[IV] $t < 0, s^2 > 0$

図 4.11 は、点 P が絶対的に隔絶された領域で起こる事象を表している。原点で生じた事象とは何の因果関係もない。これらの領域で起こった事象とは、光の信号でも結べない。絶対的に隔絶された空間的な領域である。ここでの事象は**空間的 (space like)**という。

「同時」、「以前」、「以後」という概念は、 S' 系のとり方による相対的なものになる。図の (a) は、事象 P の時間軸への射影が、原点より後の事象になっている。すなわち、「以後」の事象である。 S' 系のとり方 (S' 系の速さ) によって (b) は事象が空間軸上にあるから時間が 0、すなわち、原点の事象と「同時」の事象として認識される。(c) は事象 P の ct' 軸への射影が、原点の事象より「以前」になるので、過去のことになる。この領域は、時間的に絶対的な意味をもたない。

第 4 章 相対論のはじめ

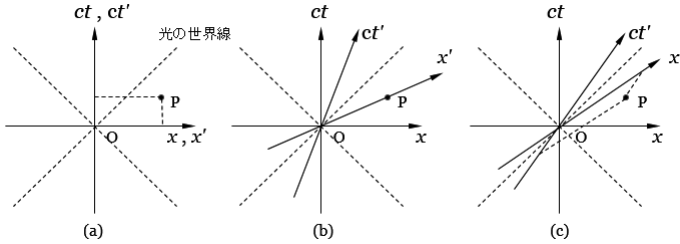


図 4.11: 絶対的隔絶領域 O に対する P の関係 (a) 以後 (b) 同時 (c) 以前

この議論は、「因果関係」を「物理的作用の伝達」という形で具体化した。また、物理現象を 4 次元時空における時空連続体という静的なものとして扱った。

§4.2.3 4 元ベクトルの成分

再び x 方向へのローレンツ変換を書き下すと

$$(x^0)' = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (x^1)' = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (4.49)$$

となって、 (x^0, x^1, x^2, x^3) は対称性のある取り扱いになる。 (x^0, x^1, x^2, x^3) を (4.41) で定義した**時空座標**、または**4 元ベクトルの成分**という。

4 元ベクトルの長さの 2 乗を s^2 とすると、通常のベクトルでは $s^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ の形になるが、(時間座標)² に関する項を負にとり

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (4.50)$$

となる空間を**ミンコフスキー** (H.Minkowski) **空間**という。上のように定義すると、 s^2 はローレンツ変換で座標系によらない量——不変量となる。

s^2 が**ローレンツ不変量**であるということは、 S 系でも S' 系でも s^2 は同じ量で

$$\begin{aligned}s^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2\end{aligned}$$

であり、これはローレンツ変換から容易に確かめることができる。

S' 系の原点 $(0,0,0)$ に固定してある時計（運動座標系、 S' 系に観測者がいて、この座標系の時計で測った時間）の示す時間は、固有時 τ になり、上式より

$$s^2 = -c^2 \tau^2 \quad (4.51)$$

である。微小座標については

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &= -c^2 d\tau^2\end{aligned}$$

固有時 τ を用いて書けば

$$\begin{aligned}d\tau &= \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= dt \sqrt{1 - \beta^2}\end{aligned} \quad (4.52)$$

である。

§4.2.4 4元ベクトル

ローレンツ変換で、**4次元座標** (ct, \mathbf{r}) と同じ変換をする4つの物理量の組

$$a = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) \quad (4.53)$$

を4元ベクトルという。4元ベクトルの成分で

$$-(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \quad (4.54)$$

は**スカラー**（方向性はなく値は1つだけ決まる）となり、**ローレンツ不変量**となる。

4元ベクトルの例をいくつかあげよう。時空ベクトル (ct, x, y, z) のほか、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を (x, y, z) 座標軸の基本ベクトルとして、物体のエネルギーを E 、運動量を $\mathbf{p} = (p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k})$ としたときに、 E, \mathbf{p} からつくる4元運動量

$$\begin{aligned} p &\equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &= p^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.55)$$

や、電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ からつくる**4元電流密度**

$$\begin{aligned} j &= (c\rho, \mathbf{j}) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (j^0, j^1, j^2, j^3) \\ &= j^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

および、電磁気学での**スカラーポテンシャル** φ , および、**ベクトルポテンシャル** A があり、2つをまとめて

$$A^\mu = (\varphi, A) \quad (4.56)$$

と表す。ここで、上付きのギリシャ文字の添え字は $0, 1, 2, 3$ を意味し、アルファベットの添え字は、 x, y, z 成分である $1, 2, 3$ を表すものとする。上付き添え字の意味は後で述べる。

4元ベクトルのローレンツ変換の成分は、行列で

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

と表すことができる。

エネルギーと運動量の関係は

$$a^0 = E/c, \quad a^1 = p_x, \quad a^2 = p_y, \quad a^3 = p_z \quad (4.58)$$

であるから

$$E' = \gamma(E - c\beta p_x), \quad p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z \quad (4.59)$$

の関係式で表される。

4.3 4元ベクトルのスカラー積

§4.3.1 スカラー積

2 つの 4 元ベクトル

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), \quad B^\mu = (B^0, \mathbf{B}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.60)$$

のスカラー積を定義する。スカラーはどの座標系からみても同じ値をもつ不変量である。

スカラー積（内積）は

$$\begin{aligned} A \cdot B &= -A^0 B^0 + \mathbf{A} \mathbf{B} \\ &= -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 \end{aligned}$$

で定義され、ローレンツ変換に関して値が変わらない不変な量である。

新しい 4 元ベクトルとして

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (-A^0, \mathbf{A}) \quad (4.61)$$

を導入する。このベクトルは、 A^μ の第 0 成分の符号を反転したものである。これを用いると

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (-A^0 B^0 + \mathbf{A} \mathbf{B}) = A^0 B_0 + \mathbf{A} \mathbf{B} \\ &= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \\ &= A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \end{aligned}$$

と表せる。ここで $A^\mu B_\mu$ の表現は、**縮約の規則**という。すなわち、対になった添字については、和をとることを意味する。ここで、上付き添字のもの A^μ は、ローレンツ変換で時空座標と同じように変換するもので**反変ベクトル**といい、下付き添字のものは、座標軸の単位ベクトルと同じように変換するもので、 A_μ を**共変ベクトル**という。

§4.3.2 計量テンソル (metric tensor)

計量テンソルとして $g_{\mu\nu}$ を定義する。計量テンソルは、もともと地形の測量のときの幾何学的性質を表す語である。ここでは、特殊相対論の範囲内と限定すれば、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

すなわち

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{\mu\nu} (\mu \neq \nu) = 0 \quad (4.63)$$

である。また、

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (4.64)$$

である。これを用いると

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (4.65)$$

第4章 相対論のはじめ

と書ける。また、スカラー積は

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \quad (4.66)$$

すなわち

$$A \cdot B = \sum_{\mu, \nu=0} g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (4.67)$$

と表すことができる。

4つの成分がローレンツ変換を受けるものを4元ベクトルといい、ローレンツ変換に対して不変なものを(4次元)スカラーという。(スカラーの例)

(a) $x = x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ のとき, $x_\mu = (-ct, \mathbf{r})$ であるから

$$\begin{aligned} x^2 &= x^\mu x_\mu = (-ct) \cdot ct + \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}^2 - c^2 t^2 \\ &= s^2 \end{aligned}$$

で、4次元距離(世界距離)の2乗はスカラーある。

(b) $p = p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$ のとき

$$\begin{aligned} p^2 &= p^\mu p_\mu = p^0 p_0 + \mathbf{p}^2 = \frac{E}{c} \cdot \left(-\frac{E}{c}\right) + \mathbf{p}^2 \\ &= \mathbf{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} \end{aligned}$$

で粒子の質量を m_0 とすると、上の式が $-m_0^2 c^2$ に等しいことを後で示す。 p^2 もスカラーである。

(c) 次もスカラーである。

$$p \cdot x \equiv p_{\mu} x^{\mu} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{E}{c} ct = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et \quad (4.68)$$

4.4 運動量とエネルギー

質量が m_0 、速度 \mathbf{v} で運動している物体の運動量は

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} \quad (4.69)$$

で与えられる。これを 4 次元に拡張するために **4 元速度**を導入する。4 次元時空を x^{μ} とし、時間として固有時 τ を用いる。4 元速度は

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad (4.70)$$

である。 u^0 は $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ 、 $x^0 = ct$ であつたから

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma c \quad (4.71)$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma v_x$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dy}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma v_y \quad (4.72)$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dz}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma v_z$$

第4章 相対論のはじめ

と表すことができる。4元速度の大きさの2乗は

$$\begin{aligned}(u)^2 &= u^\mu u_\mu = \gamma^2(-c^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(v^2 - c^2) = c^2 \frac{v^2 - c^2}{c^2 - v^2} \\ &= -c^2 \quad (\text{一定})\end{aligned}$$

になる。これらを用いると4元運動量 p^μ は

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.73)$$

と表すことができる。上式の2乗は $p^2 = p^\mu p_\mu = m_0^2 (u)^2 = -m_0^2 c^2$ である。一方 $p^2 = \mathbf{p}^2 - E^2/c^2$ であったから

$$\mathbf{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (4.74)$$

となる。よって、重要な式

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (4.75)$$

が得られる。 E は全エネルギー、 $m_0 c^2$ は物体が速さがゼロでも持っているエネルギーなので**静止エネルギー**という。さらに

$$T = E - m_0 c^2 \quad (4.76)$$

は**運動エネルギー**である。 $p^0 = E/c$ より

$$E = cp^0 = cm_0 u^0 = m_0 c \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.77)$$

となるので、質量として次の量を定義する。

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.78)$$

物体の質量は、速さとともに増大することがわかる。全エネルギーは

$$E = mc^2 \quad (4.79)$$

で与えられ、アインシュタインの「エネルギーと質量とは等価である」ことの根拠が得られる。

(例) §4.1.6 で $\beta = v/c = 0.9999$ の μ 粒子を考えたが、 $\gamma = 100$ となって寿命が延びるだけでなく、質量も $m = \gamma m_0$ で、静止質量の 100 倍になる。

談話 2：時空の関係

ローレンツ変換 (4.18), (4.19) の係数 $\gamma, \delta, \epsilon, \eta$ を求めるために、その解き方の 1 例を示す。

まず (4.18), (4.19) を (4.20) に代入する。

$$x^2 - c^2 t^2 = (\gamma x + \delta t)^2 - c^2 (\epsilon x + \eta t)^2 \quad (4.80)$$

$$= (\gamma^2 - c^2 \epsilon^2) x^2 + 2(\gamma \delta - c^2 \epsilon \eta) x t + (\delta^2 - c^2 \eta^2) t^2 \quad (4.81)$$

第4章 相対論のはじめ

この式が任意の x, t で成り立つためには、上式の両辺の係数を比較して次の関係を得る。

$$\gamma^2 - c^2\epsilon^2 = 1, \quad \therefore \quad c^2\epsilon^2 = \gamma^2 - 1 \quad (4.82)$$

$$\gamma\delta - c^2\epsilon\eta = 0, \quad \therefore \quad \gamma^2\delta^2 = c^2\epsilon^2c^2\eta^2 \quad (4.83)$$

$$\delta^2 - c^2\eta^2 = -c^2, \quad \therefore \quad c^2\eta^2 = \delta^2 + c^2 \quad (4.84)$$

さらに、前の式 (4.22) を連立させて $\gamma, \delta, \epsilon, \eta$ を求める。スマートではないが、解く例を示す。

(4.83) の右辺に (4.82) と (4.84) を代入して

$$\gamma^2\delta^2 = (\gamma^2 - 1)(\delta^2 + c^2) = \gamma^2\delta^2 + \gamma^2c^2 - \delta^2 - c^2 \quad (4.85)$$

であり、(4.22) より $\delta = -\gamma v$ したがって $\delta^2 = \gamma^2v^2$ を使うと、上式は $\gamma^2c^2 - \gamma^2v^2 - c^2 = 0$ となるので

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \quad (4.86)$$

である。上式から γ を求め、その結果を (4.22) に代入すれば次を得る。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \delta = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.87)$$

したがって (4.84) より

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{c^2} + 1} \quad (4.88)$$

$$= \sqrt{\frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + 1} \quad (4.89)$$

$$= \sqrt{\frac{v^2}{c^2 - v^2} + 1} \quad (4.90)$$

$$= \sqrt{\frac{v^2 + c^2 - v^2}{c^2 - v^2}} \quad (4.91)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.92)$$

$$= \gamma \quad (4.93)$$

となる。なお, (4.87), (4.93) を得るのに, 平方根に開くとき, \pm のうち x, x' および t, t' 軸の向きをそれぞれ同じにするために $+$ を採用した。(4.83) より

$$\epsilon = \frac{\gamma\delta}{c^2\eta} = \frac{\delta}{c^2} = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.94)$$

が得られる。これらを (4.18), (4.19) に代入して

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (4.95)$$

第4章 相対論のはじめ

または、これを x, t について解いて逆変換は

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad (4.96)$$

となる。これらが**ローレンツ変換**といわれるものである。

第 5 章

続相対論的・量子論的粒子

相対論的運動方程式とはどのようなものであろうか。この章では、相対論をニュートンの運動方程式に適用して書き換えてみる。加えて、粒子の運動量やエネルギーなどの物理量と単位系との関連を述べる。また、量子論的な運動方程式はどうだろうか。さらに、相対論的な量子力学について概観する。

5.1 運動方程式

§5.1.1 相対論的運動方程式

古典物理学における運動方程式は、ニュートンの第 2 法則による運動方程式

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (5.1)$$

がある。しかし、ニュートンの運動方程式は、相対論、および量子論の立場からは正しくない。超高速の微小な粒子である素粒子を記述することはできない。

はじめに、相対論的な方程式を見よう。ニュートンの運動方程式

第 5 章 続相対論的・量子論的粒子

を変形して

$$F_i = m_0 \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 v_i), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} \quad (5.3)$$

から出発する。 m_0 を時間に無関係な定数とすれば、微分の中に入れても差し支えない。3 次元の x, y, z 成分である $i = 1, 2, 3$ の添え字の代わりに、4 次元時空成分である $\mu = 0, 1, 2, 3$ を使う。ニュートンの運動方程式の中の速度成分 v_i 、力の成分 F_i を、4 次元量 u^μ 、 f^μ で置き換え、時間は固有時に、静止質量はそのままとして書き換える。すなわち、ニュートンの運動方程式中の量は、次の量で置き換えられる。

$$v_i \rightarrow u^\mu, \quad F_i \rightarrow f^\mu, \quad t \rightarrow \tau, \quad m_0 \rightarrow m_0 \quad (5.4)$$

運動方程式は

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = f^\mu \quad (5.5)$$

で表される。ここで、式 (4.72), (4.52) より

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt \quad (5.6)$$

の関係式があったので

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} \left(m_0 \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = f_i \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = f_i \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.8)$$

が成り立つ。ここで、 $F_i = f_i \sqrt{1 - \beta^2}$ とおくと

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v_i \right) = F_i \quad (5.9)$$

と表され

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.10)$$

は、§4.4 の (4.78) で求めた質量増大の式となっている。よって、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m v_i) = F_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.11)$$

で与えられる。3次元運動量で表すと

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.12)$$

であって、これは古典的な式と形式的には同じであるが

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.13)$$

と表されている。

(5.5) で $\mu = 0$ の場合はどうかを調べてみる。すなわち

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^0) = f^0 \quad (5.14)$$

の式はどのようなであろうか。(4.71) より $u^0 = \gamma c$ であったので、上式の左辺はある定まった数の微分であるから 0 である。そこで、

$$f^0 \equiv 0 \quad (5.15)$$

とすれば $0 = 0$ の式になる。よって、 f^μ は 4 元力であるが、独立なものは f^1, f^2, f^3 の 3 成分だけである。

§5.1.2 種々の物理量の関係

§2.9 で取り上げた単位を、相対論まで配慮したときのまとめをしておこう。

質量 $m = \gamma m_0, \quad (m_0: \text{静止質量})$

ローレンツ因子 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

粒子の光速に対する速さ $\beta = \frac{v}{c} = \frac{mvc}{mc^2} = \frac{pc}{E}$

粒子のエネルギー $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

γ の別の表示 $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$

粒子の運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}$

粒子のエネルギーの別の表示 $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$

粒子の運動エネルギー $T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1)m_0 c^2$

自然単位系 ($c = \hbar = 1$) では

$$E = m = \gamma m_0, \quad (5.16)$$

$$E^2 = p^2 + m_0^2, \quad (5.17)$$

$$p = m\beta = \beta\gamma m_0, \quad (5.18)$$

$$T = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0 \quad (5.19)$$

である。

(例 1) 運動量が $p = 10 \text{ MeV}/c$ の陽子, 電子
陽子の場合

$$E_p = \sqrt{10^2 + 938.28^2} \text{ MeV} = 938.33 \text{ MeV}$$

$$T_p = (938.33 - 938.28) \text{ MeV} = 0.05 \text{ MeV}$$

$$\beta_p = \frac{10}{938.33} = 0.0106$$

(光速の約 1% の速さ)

$$\gamma_p = \frac{E_p}{m_p} = \frac{938.33}{938.28} = 1.0001$$

(質量には変化はほとんど現れない)

第 5 章 続相対論的・量子論的粒子

電子の場合は

$$E_e = \sqrt{10^2 + 0.5110^2} \text{ MeV} = 10.01 \text{ MeV}$$

$$T_e = (10.01 - 0.51) \text{ MeV} = 9.50 \text{ MeV}$$

$$\beta_e = \frac{10}{10.01} = 0.999$$

(光速の約 99.9% の速さ)

$$\gamma_e = \frac{E_e}{m_e} = \frac{10.01}{0.5110} = 19.59$$

(質量は静止時の約 20 倍になる)

(例 2)運動量が 10 GeV/c の陽子, 電子

陽子の場合は

$$E_p = \sqrt{10^2 + 0.93828^2} \text{ GeV} = 10.044 \text{ GeV}$$

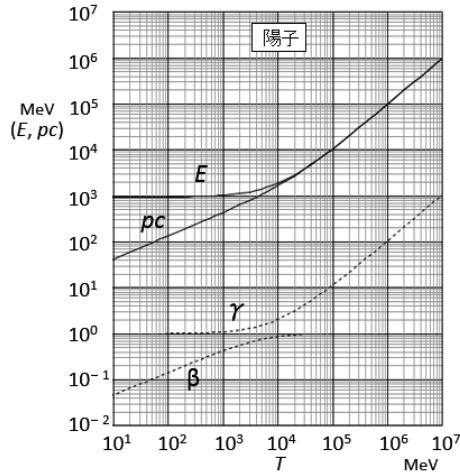
$$T_p = (10.044 - 0.938) \text{ GeV} = 9.106 \text{ GeV}$$

$$\beta_p = \frac{10}{10.044} = 0.996$$

(光速の約 99.6% の速さ)

$$\gamma_p = \frac{E_p}{m_p} = \frac{10.044}{0.938} = 10.7$$

(質量は静止時の約 10 倍になる)

図 5.1: 陽子の運動エネルギーに対する E, p, γ, β

電子の場合は

$$E_e = \sqrt{10^2 + (0.5110 \times 10^{-3})^2} \text{ GeV} \approx 10 \text{ GeV}$$

$$T_e \approx 9.50 \text{ GeV}$$

$$\beta_e \approx 1$$

$$\gamma_e = \frac{E_e}{m_e} \approx 19570$$

(質量は静止時の約 2 万倍になる)

運動エネルギー (kinetic energy) T に対して, 運動量 p , 全エネルギー E , 光速に対する速さ β , ローレンツ因子 γ の関係を表す図を, 陽子と電子について示す (図 5.1, 図 5.2)。

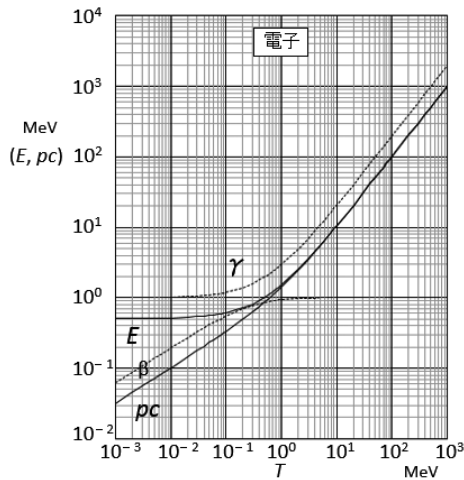


図 5.2: 電子の運動エネルギーに対する E, p, γ, β

§5.1.3 量子論的運動方程式

量子論の基本は、**プランク** (M. Planck) の**量子仮説**である。**熱輻射**の電磁波のエネルギー \mathcal{E} は、電磁波を振動子の集合と考え、プランク定数を h 、振動子の固有振動数を ν として、素量 $h\nu$ の整数倍である。すなわち、 n を整数として

$$\mathcal{E} = nh\nu \tag{5.20}$$

である。電磁波は光子であるから、光のエネルギーに関しては、エネルギーの単位

$$E = h\nu \tag{5.21}$$

がある。角振動数 $\omega = 2\pi\nu$ を用いると、光のエネルギーは

$$E = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega \quad (5.22)$$

である。アインシュタインは、プランクの考えを発展させ、光は運動量が

$$p = \hbar k \quad (5.23)$$

で表される**光 (量) 子**であると考えた。ここで k は波数ベクトルである（ k の方向は光の進行方向であり、大きさは $2\pi/\lambda = \omega/c$ である）。

電子のように質量をもつ粒子も、運動量 p と波長 λ との間には**ド・ブロイの関係式**

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.24)$$

が成り立ち、物体は粒子性と波動性の2面をもつ。

非相対論的なエネルギーと運動量は

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (5.25)$$

と表されるので、(5.22) より

$$\hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (5.26)$$

である。したがって

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad (5.27)$$

第 5 章 続相対論的・量子論的粒子

と表され、これを**分散式**という。

この関係を使って波動方程式が求められる。以下にこれを示そう。

波動関数は、複素数表示で

$$\psi = A \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (5.28)$$

と表すことができる。 i は虚数単位であり、一般に

$$\exp(\pm ix) = \cos(x) \pm i \sin(x) \quad (5.29)$$

の関係がある。この波動関数を時間および空間座標で微分すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi, \quad \nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi \quad (5.30)$$

となる。時間微分に分散式を適用すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi = -i \frac{\hbar}{2m} k^2 \psi \quad (5.31)$$

であり、上の空間座標の微分との関係より

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (5.32)$$

が成り立つ。これが自由粒子に対する**シュレーディンガー (E.Schrödinger) 方程式**といわれるものである。

エネルギーと運動量の間の非相対論的な関係式

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (5.33)$$

において, E, p を

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (5.34)$$

と置き換えて, これらが ψ に作用する演算子とみなすことにする。
ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) V があるときには,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (5.35)$$

として波動関数に作用させればよい。したがって, 粒子の位置ベクトルを \mathbf{r} とすると, ポテンシャルエネルギーがあるときのシュレーディンガー方程式が次のように得られる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.36)$$

波動関数の意味するところのひとつは, 物理量 A を多数回測定したときに得られる値の**平均値** (または**期待値**; expectation value) が

$$\langle A \rangle = \int \psi^* A \psi dx dy dz \quad (5.37)$$

で表されることにある。ただし ψ^* は ψ の複素共役量である。また $|\psi|^2 dx dy dz$ は微小立方体 $dx dy dz$ の中で粒子を見いだす確率となる。

以上, シュレーディンガー方程式について述べたが, これは非相対論的な波動方程式である。今後, これを相対論的波動方程式に書き換えなければならない。

5.2 相対論的波動方程式

これまでの方程式について振り返ると、ニュートンの方程式は、時間 t がパラメータとして現れ、空間とは対等ではない（相対論では対等である）。さらに、この方程式は、量子論からは程遠い。シュレーディンガー方程式は、すべて量子論的ではあるが、時間については 1 階、空間については 2 階の微分で、時空が非対称である。

相対論に合致する方程式として、相対論的なエネルギーと運動量の関係式 (4.75) を用いる。波動関数を $\phi(\mathbf{r}, t)$ として、 E を $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ で、 \mathbf{p} を $-i\hbar \nabla$ で置き換えると

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = (-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (5.38)$$

になり、この式を整理して

$$-\frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2 \phi = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi \quad (5.39)$$

と表すことができる。ここで

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} + \nabla^2 \quad (5.40)$$

をダランベルシャンといい、これを用いると

$$\left(\square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (5.41)$$

を得る。これが**クライン・ゴールドン (Klein-Gordon) 方程式**である。 $\phi(x) = \phi(\mathbf{r}, t)$ はローレンツ変換ではスカラーである。この波動関数 ϕ は、スピンの 0 のボーズ粒子を表している。

ところで、クライン・ゴールドン方程式は 2 階微分方程式である。これを解くためには初期条件が 2 つなければならない。たとえば、ある時刻の ϕ と $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ を与えなければならない。一方、シュレーディンガー方程式は非相対論的ではあったが、時間に関しては 1 階微分なので、ある時刻での ϕ を与えればよい。したがって、 \mathbf{r}, t が対称で両方とも 1 階の微分方程式を構成する必要がある。こうして導かれたものがディラック方程式となるが、これについては第 9 章で述べる。

第 6 章

素粒子の世界を探るには

素粒子のような微小な粒子の振る舞いを、どのようにして知ることができるのだろうか。クォークの複合粒子である陽子や中性子の大きさは約 10^{-15} m であり、電子に至っては 10^{-18} m 以下の大きさをもつ微小粒子である。ここでは、こうした極微の粒子が残したかすかな痕跡を我々が知覚できるまで増幅し、素粒子の世界で起こっていることの情報を得る実験的手段の代表例について見てみよう。

6.1 素粒子の世界を探る

§6.1.1 高エネルギーの必要性

微小な粒子の性質を明らかにするためには、高エネルギー実験が必要である。その理由を三つほどあげてみる。

微小なものを調べようとすると、なぜ高エネルギーが必要であるうか。それは次の項目になろう。

- 物質を分解する必要がある。
- 新粒子を創るエネルギーが必要である。
- 分解能をあげる必要がある。

6.1.1.1 物質の分解

物質を分解する必要があることについて見てみよう。ミクロの世界は、より強い力で結びついていることはすでに §1.3 で述べた。力の強さの比較は、電磁気力が $1/137$ 、核力が ~ 1 、ハドロン内部の力が > 10 であることを考えると、微小なものの世界では、かたく結びついているもの同士を引き離すためには、それ相応のエネルギーが必要である。陽子や中性子を分解するためのエネルギーは、より高エネルギーにならざるを得ない。

6.1.1.2 新粒子の生成

新粒子を創るためには、最低でも新粒子の質量分のエネルギーが必要である。「どんな未知の粒子があるか」を探ることは重要な問題である。このときの未知粒子の質量に関しては、アインシュタインの「エネルギーと質量とは等価である」、すなわち、

$$E = mc^2 \quad (6.1)$$

の重要な関係があることから、これを発生させるための最低限のエネルギーが決まる。未知粒子をつくるためには、上式で与えられるエネルギーを加えてやる必要がある。

1 g の物質の消滅により

$$E = 1 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J} \quad (6.2)$$

のエネルギーが発生する。逆にある質量の粒子を創るのに、その質量分のエネルギーがあればよいかというと、固定標的型といわれる実験ではそうはいかない。固定標的型の実験では、静止状態にある

第 6 章 素粒子の世界を探るには

ターゲットに加速したビームを衝突させるものである。例として、水素原子核である陽子に陽子ビームを当てて、湯川の予言した中間子を創る場合を見てみる。反応式の 1 例として

$$pp \rightarrow pp\pi^0 \quad (6.3)$$

がある。終状態に陽子が 2 つあるのは、始状態とバリオン数が一致しなければならない、すなわちバリオン数の保存則からいえる。 π^0 の質量は $135 \text{ MeV}/c^2$ なので、入射陽子ビームの運動エネルギーは 135 MeV あればよいかというそうではない。ここでは自然単位系 ($c = 1$) を使ってこれを示そう。

一般に、質量を m として反応

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + \cdots, \quad (\text{ただし粒子 2 は静止}) \quad (6.4)$$

が起こるためには、粒子 1 の運動エネルギーが、最低でも

$$T_{\min} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \cdots)Q}{2m_2}, \quad (6.5)$$

$$Q = (m_3 + m_4 + \cdots) - (m_1 + m_2) \quad (6.6)$$

であることが必要である。 Q は反応前後の全静止質量の差である(以下、質量 m_i は粒子 i の静止質量である)。この理由を考えてみる。粒子 1+2 の系において、粒子 1 の運動エネルギーを T とし、系の全エネルギーと全運動量を E, \mathbf{p} とする。

$$E = m_1 + m_2 + T \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 \quad (\boldsymbol{p}_1 \text{ は粒子 1 の入射運動量}) \quad (6.8)$$

であるので

$$\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2 = (m_1 + T)^2 - m_1^2 = T^2 + 2m_1T \quad (6.9)$$

である。重心系での全エネルギー E^* は、全運動量 $\boldsymbol{p}^* = 0$ から、ローレンツ不変量を考えると

$$\begin{aligned} E^{*2} - \boldsymbol{p}^{*2} &= E^{*2} = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = (m_1 + m_2 + T)^2 - (T^2 + 2m_1T) \\ &= (m_1 + m_2)^2 + 2m_2T \end{aligned}$$

である。エネルギーが、反応後に m_3, m_4, \dots の質量をつくるために使われるものとして、上式の T を T_{\min} と表す。不変量は反応後の全質量の 2 乗

$$(m_3 + m_4 + \dots)^2 \quad (6.10)$$

に等しいので $(m_3 + m_4 + \dots)^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2m_2T_{\min}$ 、したがって、

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \frac{(m_3 + m_4 + \dots)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} \\ &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + \dots)(m_3 + m_4 + \dots - m_1 - m_2)}{2m_2} \end{aligned}$$

となる。

話を元に戻そう。反応式 $pp \rightarrow pp\pi^0$ で、入射陽子の運動エネルギーがいくらあれば π^0 が発生するかということだったから、上述

第 6 章 素粒子の世界を探るには

の T_{\min} の式に、因子 c^2 を復元させて、

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_p = 938 \text{ MeV}/c^2, \quad m_5 = m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2 \quad (6.11)$$

を代入すると

$$T_{\min} = 280 \text{ MeV} \quad (6.12)$$

となる。すなわち、固定標的型で、陽子と陽子との衝突によって $135 \text{ MeV}/c^2$ の質量を創るのに、最低 280 MeV ものエネルギーが必要となる。これは、エネルギーと運動量の保存により、ビームのエネルギーが発生した 2 次粒子の運動エネルギーに使われて、新しい粒子を創りだすエネルギーだけではなくなるからである。

6.1.1.3 分解能の向上

分解能をあげる必要があることについて考える。粒子を衝突させて 2 次粒子を観測するときの分解能は、考えている粒子の波長による。物質は粒子でもあり波動でもあるので、波動の**回折**によってぼける現象がある。このことについて考えてみる。

直径 D の孔があると、回折現象によって、孔以外の部分にも回り込む (図 6.1)。 λ の波長をもつ光の場合には、孔からの光は回折して背後に同心円状の縞模様ができる。第一の暗輪は、小孔に入射した光の方向から角度 θ の方向であり

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.13)$$

で表される。次にこれを示す。孔の後方にスクリーンを置くと、



図 6.1: 小円板と小円孔による回折像の例

スクリーン上で θ 方向の点 P における光の強度はベッセル関数 $J_1(x)$ を用いて

$$I(P) = \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2 I_0 \quad (6.14)$$

で表される。ここで

$$x = \frac{2\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad (6.15)$$

とおいた。 I_0 は孔の直径を D として

$$I_0 = \frac{ED}{\lambda^2} \quad (6.16)$$

であり、 E は観測面上の光の全エネルギーである。暗輪のできる位置は、 $J_1(m) = 0$ となる位置であり、これの根は $m_1 = 1.220\pi, m_2 = 2.233\pi, m_3 = 3.238\pi, \dots$ になる。このことから

$$m_i = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.17)$$

であり、 $i = 1, 2, \dots$ にしたがって、第 1 暗輪、第 2 暗輪などという。 $i = 1$ すなわち第 1 暗輪の場合は

$$1.220\pi = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad (6.18)$$

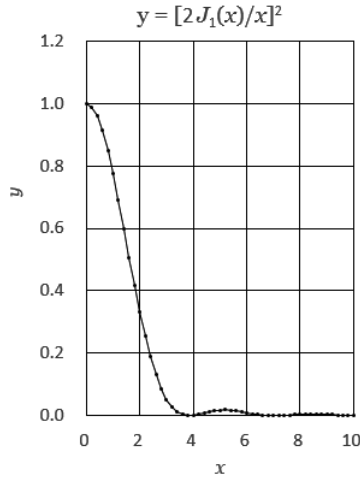


図 6.2: 小円孔による回折像の光の強度分布。横軸は $x = (2\pi D/\lambda) \sin \theta$

すなわち,

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.19)$$

となって、示すべき式 (6.13) が得られた。図 6.2 に光の強度分布を示す。

望遠鏡の場合には、遠方の 2 点を見たときの視角の差が

$$\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.20)$$

(D は対物レンズの直径) より大きな角でないと 2 点として識別できない。図 6.3 はこのときの識別状況を示している。2 点が接近してくると、2 点からの光が重なり識別できなくなる。 θ を**分解能**と

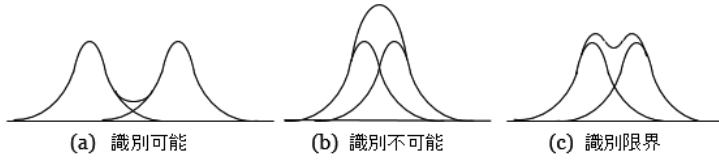


図 6.3: 望遠鏡の対物レンズの回折により, 2 点からの光の識別状況
 いう。分解能は対物レンズの径が大きいほど, また光の波長が短い
 ほど, 接近した 2 点を識別できて θ は小となる。

顕微鏡の場合も同様で, 物体が対物レンズの直径を見込む角を α
 とし, 物体と対物レンズの間の媒質の屈折率を n とすると, **最小識
 別可能距離**は

$$\epsilon = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} \quad (6.21)$$

で与えられ, ϵ が**分解能**である。開口数 $n \sin \alpha$ が大きいほど, ま
 た波長が短いほど分解能がよい。 $\epsilon \approx 0.5 \mu\text{m}$, 2000 倍程度が限界
 である。

さて, 高エネルギー実験では, 素粒子の構造を調べる必要から次
 のようなことがいえる。運動量 p の粒子のド・ブROI波長は,

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (6.22)$$

であり, 一般には縮小したド・ブROI波長

$$\lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p}, \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ は (2.7) のディラックの記号} \right) \quad (6.23)$$

第6章 素粒子の世界を探るには

を使うと、光学では長さ d の物体の構造を識別するためには、 d より小さい波長の光を用いなければならない。すなわち

$$\lambda \leq d \quad (6.24)$$

である。したがって

$$p \geq \frac{\hbar}{d} \quad (6.25)$$

となり、 d が小さいものを調べるためには運動量が大きな粒子、高エネルギー粒子が必要になる。

$d = 1 \text{ fm}$ (**フェムトメートル** $= 10^{-15} \text{ m}$) の物体を調べるのに陽子を用いたとする。陽子の運動エネルギーは、 m_p を陽子の質量として

$$T_p = \frac{p^2}{2m_p} = \frac{\hbar^2}{2m_p d^2} \quad (6.26)$$

で与えられる。陽子のコンプトン波長 $\lambda_p = \hbar/m_p c$ を用いると

$$\frac{T_p}{m_p c^2} = \frac{1}{2d^2} \left(\frac{\hbar^2}{m_p^2 c^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_p}{d} \right)^2 \quad (6.27)$$

である。 $\hbar = 6.5820 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ を代入して

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\hbar c}{m_p c^2} = \frac{6.58 \times 10^{-22} \times 3 \times 10^8}{938} \text{ m} \\ &= 0.210 \times 10^{-15} \text{ m} \\ &= 0.210 \text{ fm} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $d = 1 \text{ fm}$ 程度の大きさを観測するのに

$$\frac{T_p}{m_p c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_p}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{0.21}{1} \right)^2 = 0.022 \quad (6.28)$$

であるから、陽子の運動エネルギーとして

$$T_p = 0.022 \times 938 = 21 \text{ MeV} \quad (6.29)$$

が必要となる。これは、陽子の静止エネルギーより非常に小さいから非相対論的でよい。

6.2 素粒子の検出

一般に、素粒子が関与する現象は高エネルギーである。素粒子を検出するにはどうしたらよいであろうか。素粒子を検出するのに、それが電荷をもっているか否かによって方法が異なる。荷電粒子とそうでないものとは、検出法ががらりと変わってくる。というのは、現在の粒子検出は、最終的には電磁相互作用のみによるということでよいので、電荷をもっていない粒子は、それをいかにして荷電粒子に変換するかの方法が問題になる。荷電粒子と中性粒子に分けて述べる。

§6.2.1 荷電粒子

荷電粒子と物質との相互作用を見てみよう。

6.2.1.1 電離, 励起

荷電粒子が物質を通過すると、物質を構成する分子をイオン化する。これは粒子が高速になると、荷電粒子による電場がローレンツ変換を受けて縦方向に強くなり、あたかも強い電場の壁が物質を通過することになって、この電場の壁で原子・分子中の軌道電子がはじき飛ばされて物質はイオン化する。通過する荷電粒子の電場を E とする。静止時の電場の方向は、放射状であるが、速さ v で x 方向に動いたときの電場 E' の成分 E'_x, E'_y, E'_z は

$$E'_x = E_x, \quad E'_\perp = \gamma E_\perp \quad (6.30)$$

である。ここで、 E_\perp は粒子の進行方向に直角な成分を表し、この成分は

$$E_\perp = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \quad (6.31)$$

である。粒子の進行方向に直角方向の電場は、静止時の $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍に強くなる。

図 6.4 は、正の荷電粒子の電場の壁で電子が弾き飛ばされる様子を示したものである。荷電粒子は、物質をイオン化した分だけエネルギーを失う。すなわちエネルギー損失が生じる。長さ dx を通過するときに失うエネルギー ($-dE$) は、単位長さあたり $-dE/dx$ になる。ベーテ・ブロック (Bethe-Bloch) が、これを精密に計算して、次式を得た。荷電粒子の質量が十分大きい場合は

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi r_0^2 z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} N Z \left\{ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\bar{I}} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right\} \quad (6.32)$$

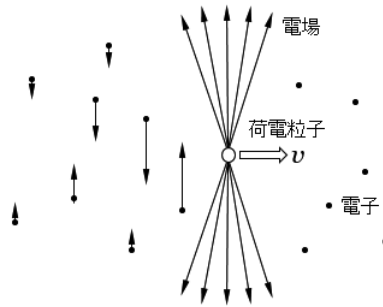


図 6.4: 荷電粒子の電場がローレンツ変換を受けて強くなり物質中の電子をはじき飛ばす。

である。ここで

$$r_0 = e^2/m_e c^2 = 2.818 \times 10^{-13} \text{ m} : \text{古典電子半径}$$

$z(e)$: 入射粒子の電荷

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV} : \text{電子の静止エネルギー}$$

$$\beta = v/c$$

v : 入射粒子の速さ

\bar{I} : 物質の平均励起エネルギー

N : 通過物質の単位体積中の原子の個数

Z : 物質の原子番号

$$N = \rho N_A / A$$

ρ : 物質の密度

N_A : アボガドロ数

A : 物質の原子量

である。

第 6 章 素粒子の世界を探るには

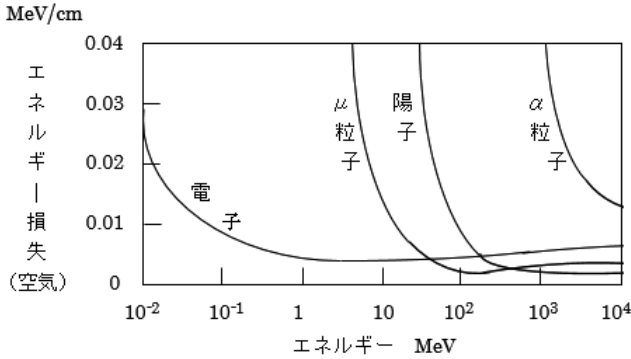


図 6.5: 粒子の運動エネルギーに対するエネルギー損失（標準状態の空気）

電子に対しては

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi r_0^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} N Z \left\{ \ln \frac{\beta \gamma \sqrt{\gamma - 1} m_e c^2}{\bar{I}} + \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{8} + 1 - (2\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln 2 \right] \right\} \quad (6.33)$$

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (6.34)$$

である。図 6.5 にいくつかの入射粒子に対するエネルギー損失を示す。横軸は入射粒子の運動エネルギーであり，縦軸は標準状態の空気のエネルギー損失である。このように，荷電粒子の通過により，通過経路に沿ってイオン化した原子と電子が現れる。

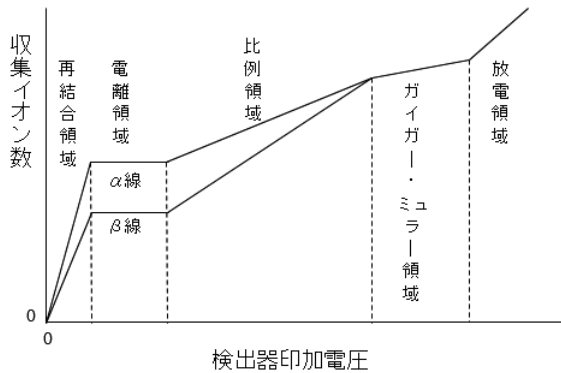


図 6.6: ガス入り検出器の電圧と収集イオン数

これを利用して通過荷電粒子を検出する。このためには、2つの方法がある。

単に粒子が通過したかどうかを知る方法と、通過した場所あるいは飛跡までも知る方法である。通過したかどうかを調べるには、物質としてガスを用い、電離してできた電子・正イオンを種にした放電があったかどうかで検出する。図 6.6 は、ガス入り検出器に加える電圧と、この検出器で収集されるイオンの個数との関係を表す模式図である。

気体のガイガー (H.Geiger) 領域の電圧を加えた**ガイガー計数管**や、**ストリーマーチェンバー**、気体の比例領域で電圧を加える**プロポーションナル計数管**など種々のものがある。

イオン化してできる電子を陽極まで集める時間から、粒子の入射した位置を知ることができる。これを**ドリフトチェンバー**という。図 6.7 にドリフトチェンバーの一例を示す。チェンバーを粒子が通

第6章 素粒子の世界を探るには

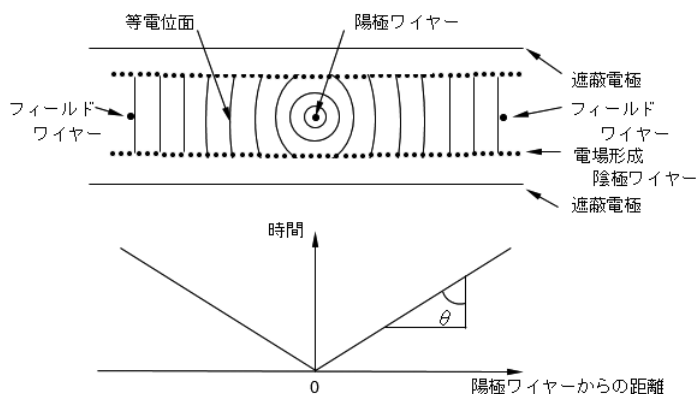


図 6.7: ドリフトチェンバー 断面図と特性図

過した位置から、ガスのイオン化による電子が陽極まで到達する時間が分かる。その時間から、入射粒子の位置がわかる。下部の特性図は、粒子が入射したときの陽極までの距離と時間の関係を表している。図中の θ は Ar (89%), CO_2 (10%), CH_4 (1%) 混合ガスの場合、 $\tan \theta \approx 5 \text{ cm}/\mu\text{s}$ 程度である。

粒子通過時のイオン化エネルギーでできる霧や泡のつながりから得られる飛跡検出器として、霧箱や泡箱があったが、すでに過去の検出器になった。立体再構成をするために霧箱や泡箱では膨大な量の写真を撮影するため、写真の解析に時間がかかるので、現在では飛跡に沿った電氣的な信号をオンラインでも処理できるドリフトチェンバーの類に取って代わられた。

また、飛跡に沿って感光する**エマルジョン**（写真乳剤）があり、宇宙線観測の分野などで使われている。検出物質として励起を利用したものもある。励起された原子や分子が基底状態になるときに光

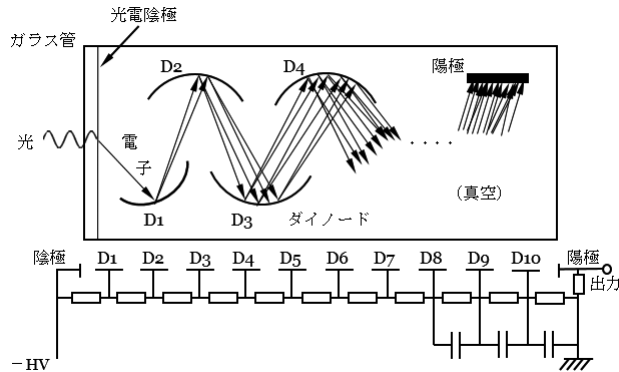


図 6.8: 光電子増倍管と電圧のかけ方

を放出する。これを利用するものに**シンチレーター**がある。シンチレーターから発生する微弱な光を、**光電子増倍管** (photo-multiplier, フォトマル) でパルスとして増幅する**シンチレーションカウンター**は、極めて一般的な装置である。光電子増倍管と電圧のかけ方を図 6.8 に示す。

6.2.1.2 チェレンコフ光

荷電粒子が透明な誘電体に入射したとき、その粒子の速さが誘電体中の光よりも速い場合には光を発生する。これが**チェレンコフ** (P. A. Cherenkov) 光である。この光を検出するのが**チェレンコフカウンター**である。屈折率 n の物質中では、光速は c/n になるので粒子の速さが $v_{th} = c/n$ 以上の入射粒子では、チェレンコフ光を発生する。 v_{th} は閾 (threshold) の速さである。速さ v の粒子から

第 6 章 素粒子の世界を探るには

のチェレンコフ光は、粒子の入射方向から

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (6.35)$$

の角度 θ 方向にリング状に放出され、発光量も β の関数なので、通過粒子の質量を識別するのに用いられる。

6.2.1.3 シャワー

電子（陽電子）は物質中でシャワー (shower) 現象を起すが、発生した電子・陽電子の総数と、入射した電子（陽電子）のエネルギーとがよい相関をもっていることを利用して、入射粒子のエネルギーを知ることができる。これを**電磁力カロリーメータ**という。図 6.9 は空気シャワーの発達状況を表している。電子が入射して制動輻射により光子を発生し、この光子から対生成によって電子・陽電子対が発生し、それぞれからまた光子が輻射され、これを繰り返してシャワーが発達する様子を示している。電磁力カロリーメータは、カロリーメータ中で発生した電子・陽電子のエネルギー損失の総量を測定し、飛来した電子または陽電子のエネルギーを知るものである。ハドロン入射の場合の**ハドロンカロリーメータ**もある。

§6.2.2 中性粒子

電荷をもたない粒子は、上に述べた方法では直接には検出することができない。しかし、中性粒子を荷電粒子に変換できれば、あとは荷電粒子の検出法で検出できる。中性粒子を荷電粒子に変換するには、2つの方法がある。

1 つは、中性粒子と物質との相互作用の反応の結果、エネルギー

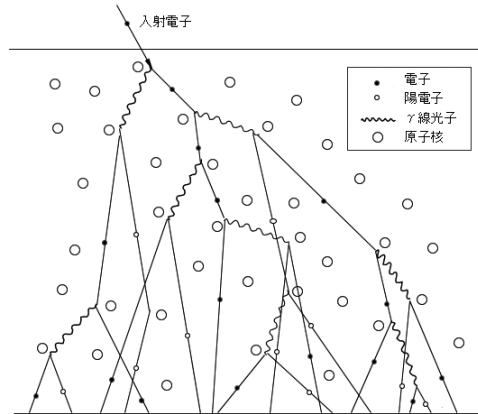


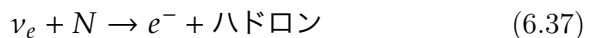
図 6.9: 空気シャワー

を得た荷電粒子の発生を観測する方法である。たとえば、中性子の検出には、中性子が物質中の陽子と衝突し、はじき飛ばされた陽子（反跳陽子）を検出する。すなわち



の陽子 p を観測し、この反応が多数回起こって最早中性子の運動エネルギーに余分なものがなくなったときの陽子のエネルギー損失の総計を知れば、入射した中性子のエネルギーを推定することができる。

また、たとえば、電子ニュートリノ ν_e は、次式のように水中で核子 N (p または n) と反応して



の反応で電子が発生し、この電子がシャワーを作るのでこれを検出

第 6 章 素粒子の世界を探るには

する。ミューニュートリノ ν_μ は次の反応のように電子を発生しないのでシャワーにはならない。

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + \text{ハドロン} \quad (6.38)$$

しかし、 μ^- がつくられるので、水中での μ^- から発生するチェレンコフ光のリングを観測すれば ν_μ を同定できる。 ν_e は多数の電子に増殖するので、個々の電子からのチェレンコフ光のリングを加えたもので、ぼやけたものになるので区別できる。反中性微子の検出も同様である。

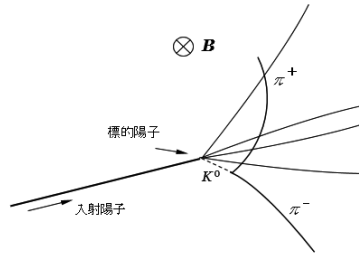
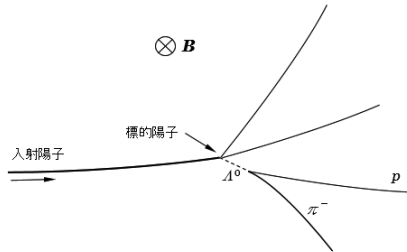
もう一つの方法は、中性粒子が荷電粒子に崩壊することを用いるものである。たとえば、中性 K 中間子は、2 つの荷電 π 中間子に壊れる。

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad (6.39)$$

この 2 つの π 中間子を前に述べた電磁相互作用で検出する。図 6.10 は**泡箱写真**の模式図である。元の写真は、**KEK (高エネルギー加速器研究機構)** 1 m 水素泡箱に、運動量が $8 \text{ MeV}/c$ の陽子を入射し、ターゲットは液体水素の陽子で、3 視野撮影されたものの 1 枚である。

図の表から裏に向かって磁場がかけられていて、飛跡粒子の運動量がわかる。そのためには他の視野から見た飛跡の写真を用いて立体再構成する。

崩壊した 2 つの粒子を $\pi^+ \pi^-$ と仮定し、崩壊する粒子を K^0 とし


 図 6.10: $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ の泡箱写真の模式図

 図 6.11: $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$ の泡箱写真の模式図

たときの適合度を調べる。さらに、 pp の一次反応との適合性から

$$pp \rightarrow K^0 + X \quad (X \text{ はその他の粒子}) \quad (6.40)$$

での K^0 と判断される。

同様に、 Λ^0 は

$$\Lambda^0 \rightarrow p \pi^- \quad (6.41)$$

の崩壊でできた p, π^- を検出する。図 6.11 は、同じ実験の Λ^0 生成事象である。

中性 π 中間子は

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad (6.42)$$

の崩壊で 2 つの光子になり、それぞれの光子は対生成を起して次のように**電子・陽電子対**が発生し、

$$\gamma \rightarrow e^+e^- \quad (6.43)$$

これらの電子・陽電子対はシャワーを発生するので π^0 の同定ができる。

このように、個々の粒子に対しては種々の方法が考案されている。

6.3 素粒子を見る——測定器の種類

10^{-15} m 以下の微小な粒子をいかにして観測できるのだろうか。その手段、方法について見ておこう。世の中には微小な世界を探るためのさまざまな測定器がある。そして、それらは日進月歩で進歩している。それを大別すると次のようになる。

(A)電気的な検出

(B)光による検出

(C)飛跡による検出

粒子の検出は、最終的には荷電粒子として検出する。すなわち、電磁相互作用のみによるものである。上の項目 (A)(B)(C) について簡潔に述べてみよう。

§6.3.1 (A) 電氣的な検出

荷電粒子が気体や結晶の中を通過すると、電離作用により正イオンと電子が生じ、電子は原子や分子に付着して負イオンとなることもある。この気体に正負の電圧を加えればイオンが集められて電流パルスとなるので、これを検出すればよい。収集されるときにイオンが増殖されることのある**ガイガー計数管**、**電離箱**、**比例計数管**、**多線比例計数箱**、**ドリフトチェンバー**などがある。半導体検出器のように、正孔と電子ができる場合もあり、この正孔と電子を検出する。

§6.3.2 (B) 光による検出

光を利用するものでは、シンチレーション光とチェレンコフ光を検出するものがある。

荷電粒子が物質中で原子・分子を励起し、これが基底状態になるときに光を放出する。物質が透明な物体であればこの光を検出することができる。この現象をシンチレーションといった。特に、この光が蛍光体 (scintillator) から発生する場合は比較的強い光が出るが、それでもまだまだ微弱なので、この光を光電子増倍管にライトガイドを経由して導き、光電子増倍管の光陰極から発生した電子を、 $\sim 10^6$ 倍の数にして電流パルスとして出力する。物質中に波長変換のためにウェーブレングスシフターを混入し、蛍光を長い波長の光に変換して光電子増倍管との効率をよくすることが図られることもある。プラスチックシンチレーターは、取り扱いが容易で、発光も $\sim 10^{-9}$ 秒と速いので多くの用途がある。

チェレンコフ検出器は、チェレンコフ輻射による光を利用したものである。チェレンコフ光は、粒子の進行方向に対して、角度

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{n\beta} \right) \approx \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{n\beta} \right)} \quad (6.44)$$

方向に発生して、光のイメージはリング状となる。粒子の速さは

$$\beta = \frac{1}{n} \quad (6.45)$$

以上でなければならないことが上式からわかる。発生する光子の数は可視光にすると、粒子の通過距離 1 cm あたり

$$N \approx 500 \sin \theta / \text{cm} \quad (6.46)$$

程度になる。これは、最小電離の粒子に対するプラスチックシンチレータで発生する光子の数の約 1/20 の強さで、微弱なものである。同じ運動量でも質量が違う粒子は $\beta (= v/c)$ が異なり、重い粒子は β が小さく、 β が $1/n$ 以下ではチェレンコフ光は発生しない。物質の屈折率を適当に選べば、粒子の質量選別に用いることができる。また、光の放出される角度によっても β を選別することができて、質量の識別に用いることができる。

§6.3.3 (C) 飛跡による検出

飛跡検出器は一時代前に**霧箱**、**泡箱**があったが現在は使われない。宇宙線の分野で**エマルジョン（写真乳剤）**が使われるのみである。電気的な検出器を駆使して、オンラインでトラックを再構成して解析に用いる時代になっている。

第 7 章

粒子の加速

加速器が原子核の実験にはじめて用いられたのは 1932 年のことであり、それ以来加速器は大型化の道をたどり、素粒子の世界を探る道具としてなくてはならないものになっている。この章では、さまざまな加速器の種類とその動作を調べてみよう。

7.1 加速原理

粒子を加速する、すなわち粒子のもつ運動エネルギーを、より高エネルギーにすることは、素粒子の実験的研究に大きな役割を果たして来た。現在の粒子加速器はすべて電気力を利用している。したがって、荷電粒子のみが加速の対象になる。さらに、加速粒子は寿命が長いものに限られ、現在加速できる粒子は、電子、陽子、陽電子、反陽子、ミュー粒子、各種イオンなどである。

次に、電気力と粒子の電荷との関係を見てみよう。図 7.1 に示すように、正・負の電極板に電圧 V を加えると、電界 E の中で正電荷 q の受ける力は

$$F = qE \quad (7.1)$$

であり、この電場中で、 d の距離を加速されときに粒子が得る運動

第7章 粒子の加速

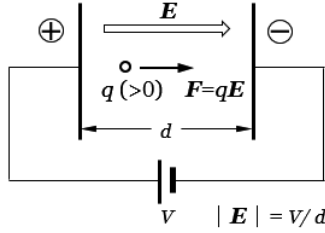


図 7.1: 電界の中で電荷の受ける力

エネルギー T は

$$T = Fd = q|E|d \quad (7.2)$$

である。 $|E| = V/d$ であるから

$$T = qV \quad (7.3)$$

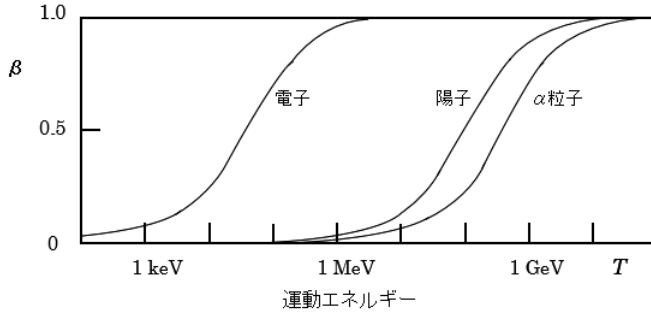
となる。

また、質量によって速さ、あるいは運動量が異なり、 m_0 を粒子の静止質量、 E を粒子の全エネルギーとすると、全エネルギー E は運動エネルギー T と静止エネルギー m_0c^2 の和であり、それはまた相対論の結果により

$$E = T + m_0c^2, \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7.4)$$

と表されるので、運動エネルギー T と β の関係は

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + T/m_0c^2)^2}} \quad (7.5)$$

図 7.2: 粒子の運動エネルギーに対する $\beta = v/c$

と表すことができる。

電子にブラウン管程度の**加速電圧** $V = 10 \text{ kV}$ を加えて加速する場合を考える。光速に対する粒子の速さの比 β を電子の場合に β_e と表す。2 点間の電圧が 10 kV で加速したときには、電子の運動エネルギーが 10 keV になるので、上式より

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} = 0.195, \quad (v_e \text{ は電子の速さ}) \quad (7.6)$$

になる。 10 keV の陽子の場合の β_p 値は

$$\beta_p = 4.62 \times 10^{-3} \quad (7.7)$$

である。また、電子の場合は、 80 keV で光速の約 **50%**、 700 keV で光速の約 **90%**、陽子の場合は、 150 MeV で光速の約 **50%**になる。粒子の運動エネルギーと β との関係を図示すると、図 7.2 のようになる。一般に、加速によるエネルギーは、速度の増加と質量の増加に費やされる。粒子の速さ v が光速に比べて十分小さいときに

第 7 章 粒子の加速

は、加速エネルギーは主に速度の増加に使われ、 v が光速に近づくと質量の増加に使われる。

p を粒子の運動量の大きさとする

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad E = T + m_0 c^2 \quad (7.8)$$

より

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2Tm_0 c^2} \quad (7.9)$$

であり、陽子と電子を比べると、同じ運動エネルギーでも、静止質量の大きい陽子の方が電子より運動量が大きい。

加速する電場として

- 2 つの電極間の電界
- 高周波 (RF: Radio Frequency) 電界 (空洞共振器)
- 誘導起電力 (時間的に変化する磁界による)

があり、加速器の要素として

- 加速部
- ビームの集束部
- ビームの発生源
- 真空容器
- 制御部

があげられる。

7.2 加速器の種類

加速器の種類として

- コッククロフト・ウォルトン型
- シンクロトロン
- ヴァンデグラフ
- 線形加速器
- サイクロトロン
- マイクロトロン
- ベータトロン
- 衝突ビーム型 (コライダー)

などがある。以下、これらのいくつかについて、簡潔に述べる。

§7.2.1 コッククロフト・ウォルトン (Cockcroft-Walton) 型

1932 年, 約 700 keV の陽子を用いて



の反応を調べた。この実験が、加速器を用いた初めての原子核反応の実験である。この加速電圧には図 7.3 に示すように、倍圧整流回路による高電圧の発生が使われた。ここで、最大加速電圧は絶縁耐圧によるので、大気中では 1 MeV 程度であり、それ以上になると高圧タンク内に密封する (4 MeV のものもあった)。現在では、主に、大型の陽子シンクロトロンの前段加速器として用いられる。加速電圧には倍圧整流回路が用いられる。

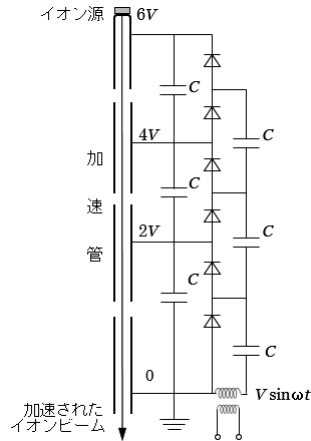


図 7.3: コッククロフト・ウォルトン型

§7.2.2 ヴァンデグラフ (Van de Graaff) 型

トランスなどの絶縁の問題をさけるため、絶縁ベルトに電荷をのせて電極に運びこんで高電圧を得る方法（1930 年）を用いたのがヴァンデグラフ型の加速器である。加速管に加える電圧は、コロナ放電で回転ベルトに乗せて、高压電極から供給される。図 7.4 に示すように、本体を高圧タンクに入れて絶縁の問題を回避している。

7.2.2.1 タンデム・ヴァンデグラフ型

はじめにゼロ電位の負イオン源からのイオンを電圧 V で加速し、 V の状態のままで電子を剥ぎ取って正イオンにし、これをゼロ電位に向けたビームとして 2 段目の加速を行い、合計 $2V$ の加速を行うものである。ヴァンデグラフは、電圧が極めて安定であり、エネルギー

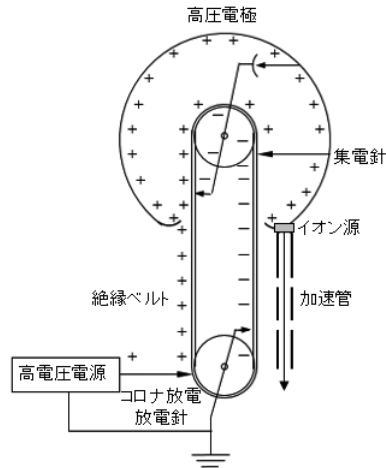


図 7.4: ヴァンデグラフ型の加速器

ギーの一様性が良いのが特徴である。

§7.2.3 サイクロトロン (Cyclotron)

ローレンス (E. O. Lawrence) とリビングストン (M. S. Livingston) によって考案された。1931 年に 4 インチの磁極をもち、1 kV の高周波電圧を加えたのが始まりである。翌年には、10 インチの磁極を用い、80 keV から 1.2 MeV の陽子を加速できた。図 7.5 にサイクロトロンの概略を示す。

図の電磁石の中に真空容器があり、ビームは 2 つのディーで高周波加速が行われる。ディーに垂直な磁場により、加速毎に半径が大きくなる。このサイクロトロンでは、20 MeV まで加速できた。

その後、高周波の周波数をエネルギーの変化に応じて変えるシン

第 7 章 粒子の加速

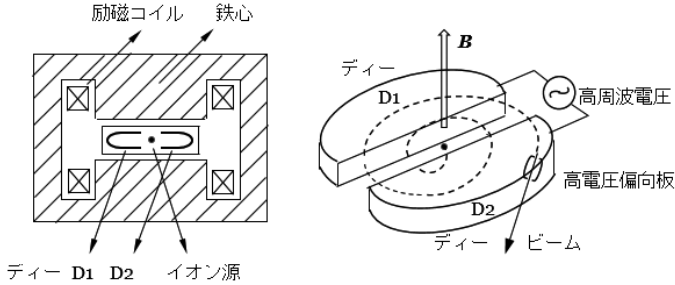


図 7.5: サイクロトロン

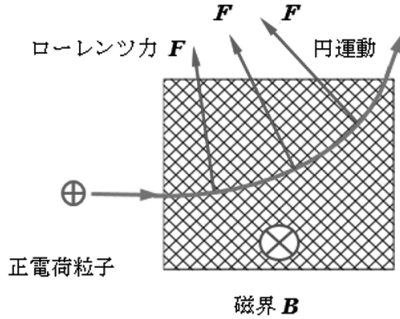


図 7.6: 荷電粒子はローレンツ力のもとで円運動をする。

クロサイクロトロンが考案され、50～100 MeV 程度の加速が行われた。最大 900 MeV に加速するものも現れた。このような加速器では、電磁石の重量が2,000 トン以上にもなった。

図 7.6 に磁場中での荷電粒子の運動の状況を示す。質量 m ，電荷 q の荷電粒子が、速度 v で垂直に加わった磁束密度 B の中を運動するとき、粒子に働くローレンツ力は、図 7.6 に示すように

$$F = qv \times B \quad (7.11)$$

である。図では、磁束密度は紙面の表から裏の方向に加えられている。粒子の速度と磁束密度が垂直のときは

$$F = qvB \quad (7.12)$$

の力を、軌道と直角方向に受けて円運動をする。円軌道の曲率半径 r は、遠心力とローレンツ力との釣り合いから

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (7.13)$$

が成り立ち、これより運動量は $p = mv = qrB$ と表すことができる。これを実用単位で表すと（ T は磁場の強さの単位テスラ）

$$p(\text{MeV}/c) = 300 \cdot q(\text{C}/e_0) \cdot r(\text{m}) \cdot B(\text{T})$$

$$p(\text{GeV}/c) = 0.3 \cdot q(\text{C}/e_0) \cdot r(\text{m}) \cdot B(\text{T})$$

の関係がある。ただし $e_0 = 1.60217733 \times 10^{-19}$ である。また、 $1 \text{ T} = 10 \text{ kG}$ だから kG 単位で表すと次式になる。

$$p(\text{GeV}/c) = 0.03 \cdot B(\text{kG}) \cdot r(\text{m})$$

粒子が半径 r の円周を 1 周するのに要する時間は

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (7.14)$$

であり、これを回転周波数 f で表すと

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (7.15)$$

第 7 章 粒子の加速

になる。これを**サイクロトロン周波数**という。粒子の全エネルギー E を用いると

$$f = \frac{c^2 q B}{2\pi m c^2} = \frac{c^2 q B}{2\pi E} \quad (7.16)$$

と表され、実用上の単位では

$$f(\text{MHz}) = 14300 q(\text{C}) B(\text{T}) / E(\text{MeV}) \quad (7.17)$$

である。

$v \ll c$ の場合には、質量 m は静止質量 m_0 にほとんど等しいので、全エネルギーは

$$E \approx m_0 c^2 = \text{一定} \quad (7.18)$$

となる。サイクロトロン周波数は、磁束密度が一定ならば一定である。この周波数はエネルギーによらない、すなわち、一定の周波数の高周波を加えればよいというのがサイクロトロンである。

高周波は 2 つのデリーのギャップの間のみにかかり、これが加速電圧となる。図 7.7 に加速の様子を示す。加速粒子が A 点でデリーのギャップを通過すると、 V の電圧で加速され（向いのデリーの方が V だけ電位が高い）、これが円運動をして再びこのデリーの出口に来たときには、B 点でそのデリーの方が V だけ電位が低い（向いのデリーの方が V だけ電位が高い）ので再び加速される。このように、半周回る毎に高周波電界の**位相**が 180° 変われば、常にギャップのところで加速されることになる。

したがって、前述のサイクロトロン周波数が、加える高周波の周波数となる。

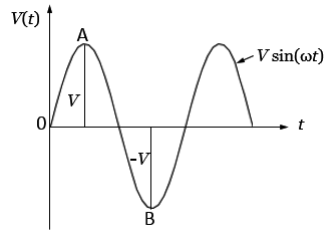


図 7.7: ディーに加える高周波電圧 A 点はディークの入り口, 同じディークの出口が B 点

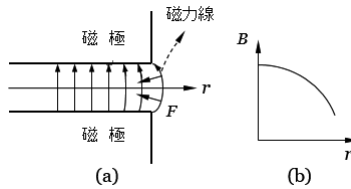


図 7.8: 動径方向の集束のための磁界

7.2.3.1 ビーム集束

イオン源から発生したビームは位置と角度にばらつきがあるので、中心軌道から外れた粒子をもとに戻す作用を設けなければならない。この目的で、ディークに加える磁界は、外にふくれたものになっている。図 7.8 に示すように、中心から外れたビームは、中心に向かって力が働くようになっている（図 7.8(a)）。また、図 7.8(b) のように、磁極の端ほど磁束密度が小さくなるように作られている。

7.2.3.2 シンクロサイクロトロン (Synchro-cyclotron)

サイクロトロンでは、加速粒子の質量は、エネルギーが大きくなるに従って

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (7.19)$$

で増大し、周回周期は一定でなくなる。さらに、集束作用のために、デリーの周辺に近づくほど磁界が弱くなっているので

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (7.20)$$

から、一定の周波数ではなくなる。したがって、エネルギーが上がるにつれて、高周波の周波数を下げて同期をとってやる必要がある。

このように、ビームの周回周波数に同期させるように加速電圧の周波数を変えてやれば、より高いエネルギーまで加速できることになる。加速周波数を時間的に変えていくことから、**周波数変調**または **FM**(Frequency modulation) **サイクロトロン**ともいう。

§7.2.4 ベータトロン (Betatron)

サイクロトロンは、周波数、質量の増大などの点から、電子のような軽い粒子の加速には向かない。

時間的に変化する磁界では、トランスの原理からわかるように、誘導起電力が発生し、この電界で加速するのがベータトロンである。1940 年、**カースト** (D. W. Kerst) が電子を 2.3 MeV まで加速し、1942 年には 20 MeV、1954 年にはイリノイ大学に 300 MeV の

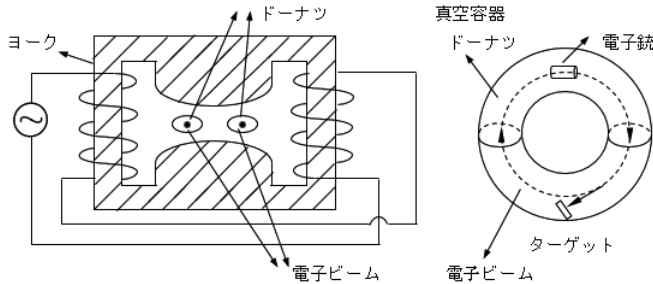


図 7.9: ベータトロン 交流磁界のもとに電子はドーナツ中の一定軌道を加速される。

装置を作った。エネルギーが高くなると、シンクロトロン放射によって失うエネルギーが急速に大きくなるので、これ以上エネルギーが高いベータトロンは作られていない（図 7.9）。高周波加速を使わない唯一の加速器であった。

電磁誘導で生ずる誘導磁場を利用して、電子の慣性質量の変化と無関係に、一定の軌道上で加速する。電磁石は 50～60 Hz で運転し、電子は十万回以上もドーナツ内を回る。したがって、ドーナツの真空度が極めて良くなければならない。

7.2.4.1 ベータトロン振動

中心軌道半径 r_0 、軌道上の磁束密度 B_0 、粒子の運動量 p との間には

$$p = qr_0B_0 \quad (7.21)$$

第7章 粒子の加速

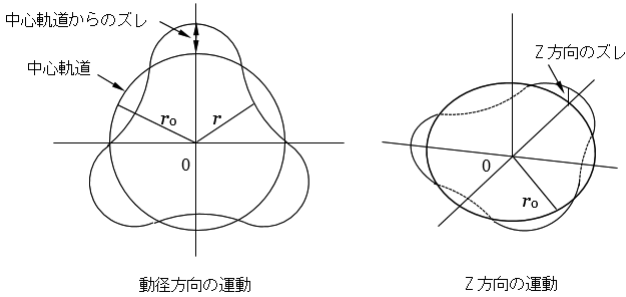


図 7.10: ベータトロン振動（図では軌道のズレを誇張してある）

の関係があり、個々の電子はこの中心軌道を振動しながら周回運動をしている。このように、中心軌道から外れた粒子が中心軌道のまわりに行う振動のことを**ベータトロン振動**という（図 7.10）。

この振動は、ベータトロンのみならずシンクロトロンなどでも極めて重要である。このときの角振動数を ω とすると

$$\begin{cases} \omega_r = \omega\sqrt{1-n} \\ \omega_z = \omega\sqrt{n} \end{cases} \quad (7.22)$$

または慣用的に

$$\begin{cases} v_r = v\sqrt{1-n} \\ v_z = v\sqrt{n} \end{cases} \quad (7.23)$$

と表すこともある。ここで

$$n = -\frac{r_0}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (7.24)$$

であって、 $0 < n < 1$ が安定軌道の条件である。これはあらゆる加速器の基礎原理である。しかも、このような加速器ではベータトロンチューン (tune) $\nu_r/\nu, \nu_z/\nu$ は 1 より小さい。

上述の加速器は、後の**強集束型**に対し**弱集束 (weak focus) 型加速器**と呼ぶ。この方式では x, z 両方の集束条件を満たす限り、 ν_x, ν_z を同時に大きくとることはできない。

7.3 シンクロトロン (Synchrotron)

加速粒子のエネルギーが大きくなると、サイクロトロンでは軌道半径が大きくなり、電磁石の質量は半径の 2-3 乗で重くなる。これに対して、シンクロトロンは、軌道を一定に保ちながら加速するので、軌道部分にのみ電磁石があればよく、極めて少ない重量の鉄となる。したがって、高エネルギーではシンクロトロンの方が優れている。

§7.3.1 概要

この加速器の初期の発展を振り返っておく。

1946 年 ベータトロンの改造によりシンクロトロンの実証

1947 年 ジェネラル・エレクトリック (G.E) 社で 70 MeV 電子シンクロトロン

1952 年 ブルックヘブン国立研究所 (BNL) に 3 GeV のコスモトロン。中間子の研究

1954 年 カリフォルニア大学に 6.2 GeV のペバトロン。ディラックの反粒子を発見

1957 年 モスクワのドゥブナ研究所で 10 GeV のシンクロファゾトロン。
アルゴンヌ国立研究所 (ANL) に 12 GeV の ZGS (Zero Gradient Synchrotron)

以上はすべて陽子シンクロトロンである。この後、BNL のリビングストン M.S.(Livingston)、クーラン (E.D.Courant) とスナイダー (H.S.Snyder) により発見された**強集束の原理**により、電磁石の量が極めて少なくてすむことがわかり、30 GeV の AGS を建設

第 7 章 粒子の加速

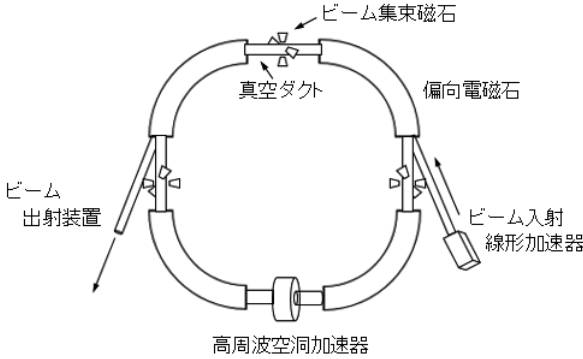


図 7.11: シンクロトロン構成要素

した（1960 年）。

強集束（収斂）は、動径方向に対する磁界の勾配が、正の電磁石と負の電磁石を交互に並べて達成できる。AGS(Alternating Gradient Synchrotron) は、等しい焦点距離をもつ凸（集束）と凹（発散）レンズの組み合わせは常に集束することに類似している。その後のシンクロトロンはすべて強集束型である。

シンクロトロンの構成は、図 7.11 に示すように軌道を一定にしたまま加速するので、磁界をエネルギーの増加と共に大きくしていく。高周波の周波数も粒子の周回速度に合わせて変える。磁界、高周波周波数共に変化するものがシンクロトロンである。

次に、粒子の運動量を p ，軌道上の磁束密度を B ，高周波の周波数を f_{rf} とすると、次の式が成り立つ。

$$p = p(t), \quad r = r_0 = \text{一定}, \quad B = \frac{p(t)}{qr_0} \quad (7.25)$$

§7.3 シンクロトロン (Synchrotron)

$$f_{rf} = \frac{qB(t)}{2\pi m(t)} = \frac{f_0 pc}{\sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}} \quad (7.26)$$

ただし r_0 は中心軌道の曲率半径で

$$f_0 = \frac{c}{2\pi r_0} \quad (7.27)$$

は高速粒子に対する周回周波数である。粒子エネルギーが静止エネルギーより十分大きければ、高速電子などでは $f_{rf} \approx$ 一定である。あらかじめ、入射器といわれる低エネルギーの加速器で加速してからリングに入射する必要がある。

コスモトロン (3 GeV) で電磁石の重量は 2,400 トン、シンクロファゾトロン (10 GeV) で 39,000 トンあったのに対し、強集束の原理を用いた BNL の AGS では、30 GeV までも加速できるのに、電磁石の重量は 4,000 トンであった。シンクロトロンにおけるビーム加速の状況を図 7.12 に示す。フラットトップと呼ばれる磁界が最高値を維持している間にビームをとり出す。

ビームは、実験で用いる計数器の応答の速さが十分追いつけるように、長い時間にビームをとり出すようにする。

§7.3.2 位相安定の原理

1945 年に **マクミラン** (E. M. McMillan), **ヴェクスター** (V. I. Vekster) は多重加速における周期の問題を解決する方法を見つけ、理論的には限りなく高エネルギーまで加速できることを示した。

シンクロトロン中を数百万回回る粒子に対して、加速は可能であろうか。ビーム中の個々の粒子のエネルギーもそろっていないし、

第 7 章 粒子の加速

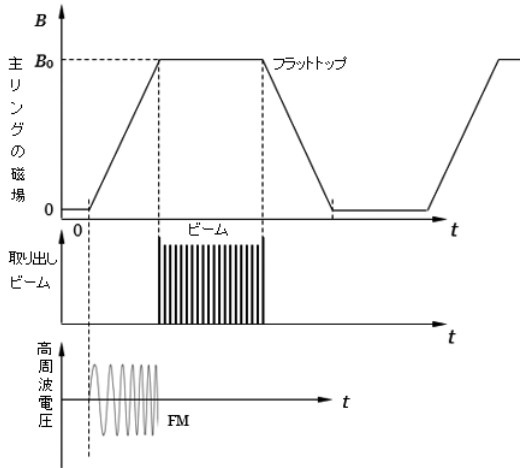


図 7.12: シンクロトロンにおける磁界，高周波加速電圧と取り出しビームとの関係

高周波に対する**位相**もそろっていない。このような粒子は加速可能か。同期粒子に対しては問題ない。図 7.13 に示すように，**加速空洞**にやってくる粒子に同期して高周波がかかるものとする。**高周波ギャップ**に加速電圧

$$V(t) = V \sin 2\pi f_{rf}t \tag{7.28}$$

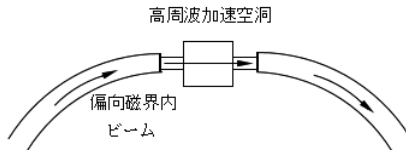


図 7.13: 同期した加速空洞のビーム

§7.3 シンクロトロン (Synchrotron)

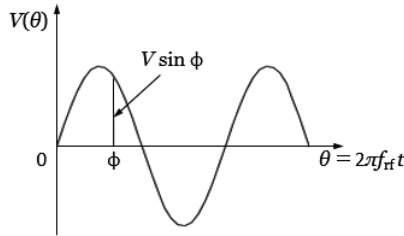


図 7.14: 粒子に加えられる高周波の位相 ϕ での加速電圧

が加えられている。粒子が加速空洞を通過するときの高周波電圧の位相を θ とすると、図 7.14 に示すように $\theta = 2\pi f_{\text{rf}} t$ として、ある位相 ϕ で、電荷 q の粒子は、電界からのエネルギーを得る。

$$\Delta E = qV \sin \phi \quad (7.29)$$

各周期毎にこのような位相を得る粒子があり、この粒子の位相を ϕ_s とすると、このときの軌道は同期軌道になる。このときには、軌道 1 周あたり

$$\Delta E = qV \sin \phi_s \quad (7.30)$$

のエネルギーを得る。位相が常に ϕ_s であるような粒子は、常に同じ $\Delta E = qV \sin \phi_s$ だけ加速されるが、これとは異なった位相でギャップに到達した粒子はどうなるであろうか。 ϕ_s より小さな ϕ で入射した粒子はどうなるか。

図 7.15 に示すように、a 点で入射したとする ($\phi_s > \phi$, 電圧減少側)。位相が ϕ_s の入射粒子は、次の周期でも ϕ_s で、この間の同期粒子のリングを回ってくる間の周期に等しい。また、得るエネル

第 7 章 粒子の加速

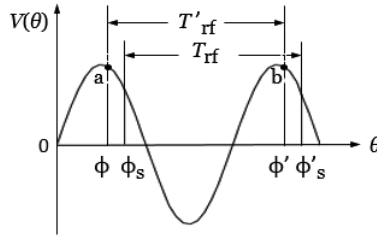


図 7.15: a 点で入射した非同期粒子が次の周期 (b 点) で同期粒子の位相に近づく。

ギーは, ΔE_s である。a 点入射の粒子が得るエネルギー ΔE は

$$\Delta E = qV \sin \phi > qV \sin \phi_s = \Delta E_s \quad (7.31)$$

であって, $\Delta E > \Delta E_s$ なので粒子の得るエネルギーは, 同期粒子のもつエネルギーより大きい。エネルギーの大きな粒子は, 小さな粒子よりも大きな半径を描く。速度がほとんど光速に近い場合には, エネルギーの大小によって速度はほとんど変化しないので, 位相が ϕ の粒子の周期は, 半径が大きくなる分だけ長くなる。したがって, この粒子の周期を T'_{rf} とすると

$$T'_{rf} > T_{rf} \quad (7.32)$$

である。よって, この粒子は次の周期にはもとと同じ位相 ϕ のところではなく, ϕ' の点にずれる。位相は

$$\phi < \phi' < \phi_s \quad (7.33)$$

であり, 1 周期回った後の位相は, 同期粒子の位相に近づく。

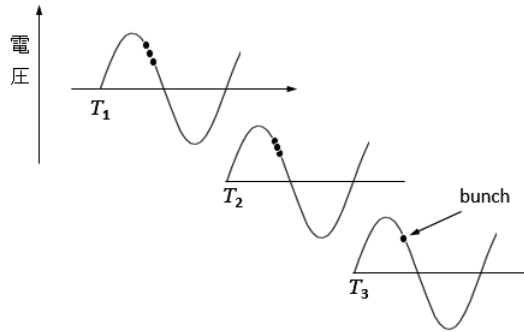


図 7.16: 一周毎にビームの位相がそろっていき団子状になる。

ϕ_s を通りこした場合にも同様 ϕ_s に近づく。すなわち、違った位相で入射した粒子でも同期粒子の位相に近づく。これは位相が安定することを示している。もう 1 回転するとエネルギーは E_s から更に遠ざかるが、位相がどんどん近づく。位相が ϕ_s を通りこしてしまえば今後は減速に転じ、結局、エネルギーも位相も同期粒子に近づく。この状態は、ビームが団子状態になることであり、このことを**バンチ (bunch)** という。図 7.16 にこれを示す。

§7.3.3 高周波加速

高周波を空洞 (cavity) に加えて加速するが、これをインダクタンス L をもつコイル L とキャパシタンス C をもつコンデンサ C による LC 共振器で考える。**LC 共振**は図 7.17 のような状況になる。共振電流が流れている状態では、電界 E は C の部分に、磁束密度 B

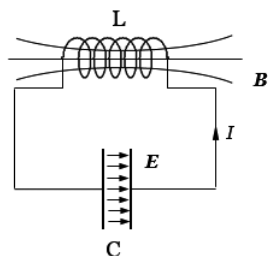


図 7.17: LC 共振器 電界は C に，磁界は L に集中している。

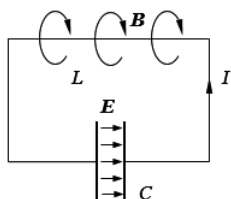


図 7.18: 1 本の電線でもインダクタンスをもち，共振回路を構成する。

は L に集中している。共振周波数は

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7.34)$$

である。

L は一本の電線でもある値をもっていて，共振回路を構成する（図 7.18）。この電線を C の周りに回転して，導体で C の周りを囲んでも同じである（図 7.19）。

結局，次の図 7.20 の形にし，真中の空洞の部分を C，周囲の導体部分が L となる構造とすると，磁界と電界の状態は図 7.21 となる。

電界と磁界は図のようになり，この電界部分でビームを加速させ

§7.3 シンクロトロン (Synchrotron)

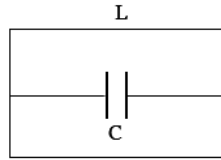


図 7.19: 図 7.18 の C の周りを導体で囲んでも LC 共振器になる。

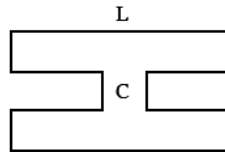


図 7.20: 形が図のようになっていても同様である。

ることができる。

L, C は形状のみで決まるので、共振周波数も唯一つに定まる。前段入射器により十分高速にして入射する電子シンクロトロンのように、周波数固定の場合にはこれでも良いが、陽子シンクロトロンの場合に、加速と共に粒子の速さが変わり、高周波の周波数を可変にしなければならない。

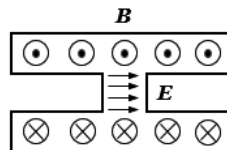


図 7.21: 図の形状の場合の電界と磁界，C の部分の電界で加速する。

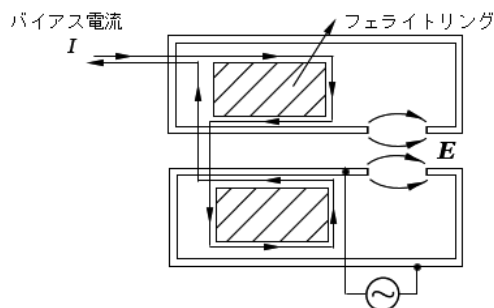


図 7.22: フェライトコア入り空洞共振器

このときには、図 7.22 のように、フェライトコア入り**空洞共振器**とする。フェライトは、高周波特性の極めてよい磁性材料である。磁界の強い部分にフェライトリングを入れて、フェライトを取り巻く線にバイアス電流を流すと、フェライトの中の磁束密度が変わり、フェライトの透磁率が変わる。例えば、ソレノイドコイルの中に鉄心を入れるとインダクタンスが変わるように、フェライトの透磁率 μ が変わるとインダクタンス L が変わり、共振周波数を変えることができる。

なお、空洞内面には表皮電流が流れることによる高周波のロスがあるので、導体ループでできた結合器を通じて高周波電力を供給する。陽子が加速されてリングを 1 周すると、速さが速くなるので周期も短くなり、このため高周波の周波数も上げなければならない。このときには、バイアス電流を変えながら同期をとることになる。

§7.3.4 強集束の原理

ベータトロン振動数は動径方向と磁界方向 (z 方向) に (7.22) または (7.23) で与えられ, r, z 方向とも安定な軌道であるためには $0 < n < 1$ であった。ただし,

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad n = -\frac{r_0}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial r} \left(= -\frac{\Delta B_z/B_0}{\Delta r/r_0} \right) \quad (7.35)$$

上式の括弧内は、半径方向の微小変化に対する磁界の変化の割合を表している。 n を正の大きな値にすると v_z を大きくでき、 n を負で大きな値にすると v_z を大きくできるが、両方の v を同時には大きくできない。磁石を2個組み合わせて、絶対値の大きな正・負の値をもつ2つの電磁石を並べると r, z 方向とも、ベータトロン振動に対して強い集束ができる。

n の値が大きな正負の電磁石を並べて作ったのが **Alternating Gradient Synchrotron (AGS)** である。強集束シンクロトロンの電磁石は、図 7.23(a),(b) のように2種類ある。水平方向を基準にとって考えると、1つは集束用の F セクターで、もう1つは発散用の D セクターである。

これを2つ並べると、光学系になぞらえ、凸、凹レンズを使って図 7.24 のように表す。図 7.24 のような場合にはレンズの公式

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (7.36)$$

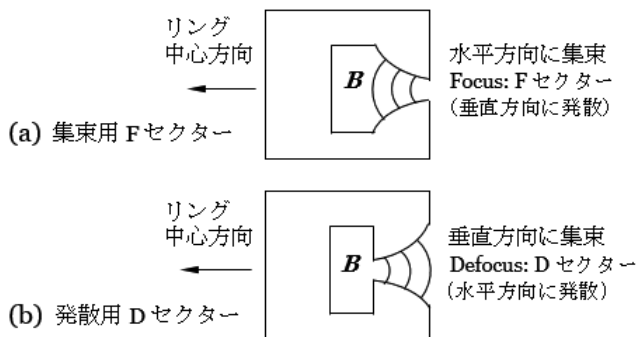


図 7.23: 強集束シンクロトロン of 電磁石

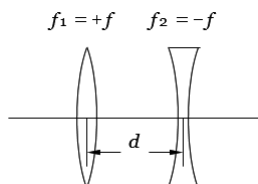


図 7.24: ビーム光学系 集束と発散で集束になる例

が成り立ち $f_1 = +f$, $f_2 = -f$ の場合には

$$F = \frac{f^2}{d} > 0 \quad (7.37)$$

となって、全体の F は正、すなわち集束になる。このとき、2つのレンズにより、水平方向は集束と発散、ならびに、垂直方向は発散と集束であるが、 f_1, f_2 の符号を変えても全体の F は変わらず集束になるので、水平・垂直方向とも集束となる。

このように、凸レンズと凹レンズ、すなわち F, D セクターを交互におくのが強集束の原理である。ビームの進路を曲げるにも電磁

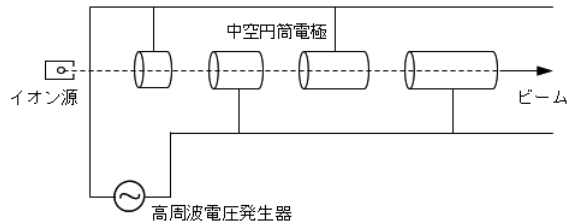


図 7.25: 線形加速器

石（ベンディング・マグネット）を使うが、光の色はビームでは運動量の違いとなる。このように光学系になぞらえて**ビーム・オブティックス**という。

7.4 線形加速器

これまでのサイクロトロンやシンクロトロンなどの円形加速器とは異なって、荷電粒子をまっすぐに加速する線形加速器（**リニアック**：linear accelerator, LINAC）がある。加速には高周波が用いられる。

線形加速器の模式図を図 7.25 に示す。一つおきに接続された中空の円筒形の中を荷電粒子が通過して行く。たとえば、正電荷の粒子を加速する場合には、円筒の中は等電位なので加速は生じないが、この円筒に入射されるときに負の電場であったのが、この円筒を通過している間に正の高周波に変わり、次の円筒は逆位相なので負になる。加速は 2 つの円筒間の電場で行われる。これで次々と加速されて高エネルギーとなる。次の電極である円筒までの時間は、加

第 7 章 粒子の加速

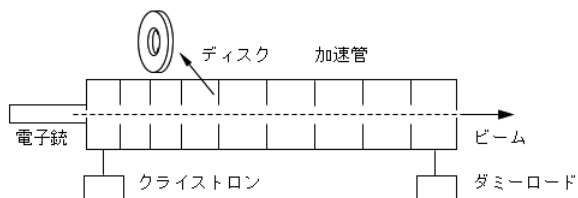


図 7.26: 導波管にディスクを挿入し、電子とマイクロ波の同期をとる。

速によって短くなってくるので、その分、円筒を長くして時間の同期をとっている。現実の電子あるいは陽子の線形加速器では、周波数が 100 MHz から 3 GHz 程度の導波管や**空洞共振器**が用いられ、図 7.26 に示すような円盤（ディスク）を組み込んだものもある。

進行波型電子リニアックでは、円形導波管にディスク状の絞りを入れ、電子の速度に**導波管**を通過する電磁波の位相速度を合わせ、電子とマイクロ波を同期させて加速することができる。図中の**クライストロン**は高周波電力発生器であり、電子の入力側から供給される。加速管に供給された電力は電子の加速に費やされ、残りの電力はダミーロードとしての抵抗体に捨てられる。ビームの横方向の広がりを集束するために、ソレノイドコイルや**4 重極電磁石**が使われる。電子に対しては、代表的なものとしてスタンフォード線形加速器センターにある長さが 2 マイルの 50 GeV 加速器がある。

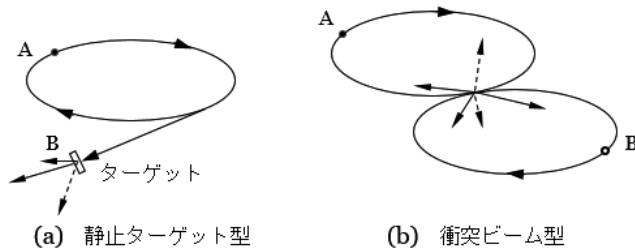


図 7.27: 2 種類の加速器

7.5 衝突型加速器

加速器は静止（固定）ターゲット型と衝突ビーム型に大別される。静止ターゲット型は、加速した粒子を加速器から取り出し、静止しているターゲットに衝突させるものである。

2 次粒子の大部分は、ビームが入射した方向に発生する。衝突ビーム型は 2 台の加速器で加速されたビームを、ほぼ正面衝突させる（図 7.27）。2 次粒子は、主に 2 つのビーム方向にジェット状に発生する。静止ターゲット型で、図中 A の加速粒子は通常電子あるいは陽子であり、B のターゲットには液体水素、各種の原子核物質などが用いられる。

静止ターゲット型で不変質量、または重心系のエネルギーを E_{CM} 、ビーム粒子のエネルギーを E_0 、ビーム粒子の質量を m_a 、ターゲット粒子の質量を m_b とし、ビームとターゲット系の全エネ

第 7 章 粒子の加速

ルギーと全運動量を E, \mathbf{p} とすると、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E_{\text{CM}}^2 &= E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 \\ &= (E_0 + m_b c^2)^2 - (E_0^2 - m_a^2 c^4) \\ &= m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4 + 2m_b c^2 E_0 \end{aligned}$$

であるから、十分な高エネルギーでは

$$E_{\text{CM}} \approx \sqrt{2m_b c^2 E_0} \quad (7.38)$$

である。重心系のエネルギーは、ビームエネルギーを増加させてもその平方根でしか増加しない。

一方、衝突ビーム型では、反対方向に加速された 2 つのビームのエネルギーを E_a, E_b とすると

$$E_{\text{CM}} = E_a + E_b \quad (7.39)$$

である。エネルギーが E の同一質量の粒子なら

$$E_{\text{CM}} = 2E \quad (7.40)$$

になる。

エネルギーが 1 TeV, 1 TeV の陽子衝突型加速器での重心系のエネルギーは、2 TeV であるが、ビームエネルギーが 1 TeV の静止ターゲット型加速器の重心系のエネルギーは、43 GeV にしかない。衝突型加速器がいかに有利であるかがわかる。世界の大型加速器は、ほとんど衝突型加速器である。衝突に用いる粒子は、陽子・陽子、陽子・反陽子、電子・陽子、電子・陽電子などさまざま

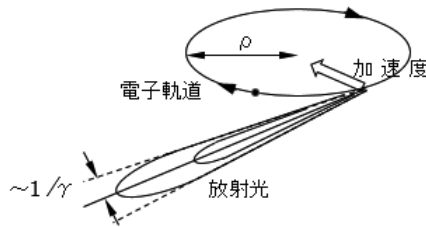


図 7.28: 放射光

ある。エネルギーが同じで、粒子・反粒子型の衝突型加速器では、2 粒子の電荷の符号が異なるだけであるから、1 リングの加速器で、互いに反対方向に加速してやればよい。衝突型加速器では、円形に近いリング型と、直線状に加速する**リニアコライダー** (linear collider) に分けられる。電子のような軽い粒子では、リング状に加速を行なったときには、**シンクロトロン放射** (放射光) による損失が問題になるが、リニアコライダーでは問題にならない。

電荷 e の荷電粒子が、加速度 a で運動すると、荷電粒子の周りの電磁場が振り落とされて、光子が発生する。この結果、荷電粒子にはエネルギー損失が生じる。

放出される光子の強度 I は、加速度の大きさの 2 乗に比例し

$$I \propto a^2 \quad (7.41)$$

である。荷電粒子の軌道の曲率半径を ρ 、ローレンツ因子を γ とすると、SI 単位系での単位時間に放射するエネルギーは

$$I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2c}{3} \frac{\beta^4\gamma^4}{\rho^2} \quad (7.42)$$

第 7 章 粒子の加速

である。この式から γ の 4 乗に比例するので、少しの加速ですぐ大きな値の γ になる電子では、放射光を発生して加速粒子のエネルギー損失になる。電子の場合にこれを電子のエネルギーで表す。 $E = \gamma m_0 c^2$ を用いると

$$I(W) = 6.77 \times 10^{-7} E^4 (\text{GeV}) / \rho^2 (\text{m}) \quad (7.43)$$

になる。電子が円軌道を 1 周する間に失うエネルギーは

$$\Delta E (\text{keV}) = 88.5 E^4 (\text{GeV}) / \rho (\text{m}) \quad (7.44)$$

である。シンクロトロン放射による光は、軌道の接線方向に極めて指向性の強いものとして放射される (図 7.28)。高エネルギーになると、エネルギー損失 ΔE は膨大なものになり、加速によって損失分を補えなくなるところが円形加速の限界になる。

§7.5.1 ルミノシティ

2 台の加速器によって粒子を直線的に正反対方向から加速し、これを衝突させる。この際にコライダーの性能を表すパラメータの 1 つがルミノシティである。素粒子反応の頻度を表すのに、反応の断面積を σ 、単位時間に起こる数を N としたとき

$$N = L\sigma \quad (7.45)$$

で表される L をルミノシティ (luminosity: 輝度, 衝突頻度) という。その次元は

$$L = N / \sigma \quad (7.46)$$

より、 $[\text{時間}]^{-1}[\text{長さ}]^{-2}$ であることがわかる。加速器のルミノシティが大きければ、実験での効率が向上し、稀な事象の観測も可能になる。ルミノシティは、

$$L = kfN_1N_2/A \quad (7.47)$$

と表わされ、 N_1, N_2 は 2 種類のビームの粒子数、 A は衝突点でのビームの断面積、 f はビームの周回周波数、 k はビームのかたまり・バンチ数で、加速器のパラメータのみで表される量である。コライダーでできる限りルミノシティを大きな値にするために、ビームの粒子数・ビーム電流を増やすことと、衝突点でのビームの断面積を小さくすることが大事である。ちなみにトリスタン加速器でのルミノシティの最高値は $4 \times 10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ であり、KEKB 加速器では約 $2 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ であった。

衝突型加速器においては、軌道が曲率をもつと加速粒子がシンクロトロン輻射を起こして、せっかく加速したエネルギーが損失に変わってしまうので、反対方向から真っ直ぐに加速する方法（リニアコライダー）が採られる。その例として、**国際リニアコライダー** (International Linear Collider: ILC) 計画がある。互いに正反対向きに加速された電子と陽電子を、加速器の中央部で衝突させ、周りの測定器によって反応を観測する。ILC は全長約 50 キロメートルあり、重心系エネルギーが 500 GeV としてスタートする予定である。

談話3：ルミノシティの実用単位

衝突型加速器 (colliding machine) でのルミノシティ L の定義は、 N を単位時間に起こる反応数、 σ を反応の断面積として

$$L = \frac{N}{\sigma} \quad (7.48)$$

であった。ルミノシティの次元は [面積] $^{-1}$ [時間] $^{-1}$ 、または、[長さ] $^{-2}$ [時間] $^{-1}$ である。断面積は、反応の物理的過程で決まる量なので、これを操作することはできないが、単位時間に起こる反応数 N は大きくすることができる。たとえば、ビームの数を増加させたり、ビームの空間的な密度を大きなものにしたりで反応数を増加させることができる。

面積の単位であるバーン (b) と cm^2 との関係を表しておく。

$$\begin{aligned} 1 \text{ b} &= 10^{-24} \text{ cm}^2, & 1 \text{ mb} &= 10^{-27} \text{ cm}^2, & 1 \text{ } \mu\text{b} &= 10^{-30} \text{ cm}^2, \\ 1 \text{ nb} &= 10^{-33} \text{ cm}^2, & 1 \text{ pb} &= 10^{-36} \text{ cm}^2, & 1 \text{ fb} &= 10^{-39} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (7.49)$$

慣例としてルミノシティ L の単位には $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ を用いている。したがって、上記 §7.5 の最後で紹介した KEKB 加速器のルミノシティとして $2.0 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (ちなみにこのルミノシティは、2009 年 6 月に前人未達の $2.0842 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ に達した) のときの反応数を見てみよう。

反応の断面積が 1 nb、すなわち $1 \times 10^{-33} \text{ cm}^2$ の事象があったと

すると、 $N = L\sigma$ の式より

$$N = (2.0 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1})(1 \times 10^{-33} \text{ cm}^2) = 20 \text{ s}^{-1} \quad (7.50)$$

であり、毎秒 20 イベントの反応数（衝突回数）が得られる。

次に、積分ルミノシティについて考えてみる。積分ルミノシティは、ある期間までのルミノシティの実測値を積算したものであり、

$$\int L dt \quad (7.51)$$

のことであるから、その次元は [面積] $^{-1}$ である。したがって、面積を nb, pb など表して、積分ルミノシティが 10 インバースピコバーン (10 pb^{-1}) などという。これは、断面積が 1 ピコバーンの事象が 10 回観測されるともいいし、断面積が 10 ピコバーンの事象が 1 回観測されるともいい。

第 8 章

マクスウェル方程式の美しさ

1864 年、マクスウェル (C. Maxwell) は電磁場の方程式を考案した。それ以来、150 年に及ぶ歴史の展開の中で、それは重要な骨格を成してきた。特に、現代が電気文明といわれる真っ只中に、燦然と輝く金字塔を打ち立てた意義は大きい。この章では、マクスウェルの方程式を吟味することはせず、それがいかにして単純な美しい式にまとめられていくかを見てみよう。

よく知られている 4 つのマクスウェル方程式は、電磁場のポテンシャルを用いると 2 つの式で表され、さらに 4 つの成分をもつ 4 元ポテンシャルを用いれば、たった 1 つの美しい式で表される。ゲージなる言葉もでてくる。このようなことの理解のために、前もってベクトル解析の手法を振り返りつつ議論をしよう。

8.1 いくつかのベクトル演算

よく知られているベクトル演算のまとめをしておこう。

A, B を 2 つのベクトルとし、それぞれの x, y, z 成分を

$$A = (A_x, A_y, A_z), \quad B = (B_x, B_y, B_z) \quad (8.1)$$

とする。 i, j, k を x, y, z 方向の単位ベクトルとし、これを使うと

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \quad (8.2)$$

と表すことができる。

● スカラー積

2つのベクトルを掛け合わせて、1つのスカラー（数値のみの量）をつくる方法である。計算は次の式による。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta, \quad (\theta \text{ は } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ のなす角}) \end{aligned}$$

内積、ドットプロダクトともいう。

● ベクトル積

2つのベクトルを掛け合わせて、もう1つのベクトルをつくる方法である。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (8.3)$$

新しいベクトルの方向は、 \mathbf{A} を \mathbf{B} の方向に右ねじを回したときに右ねじの進む方向であり、大きさは \mathbf{A}, \mathbf{B} の大きさに \mathbf{A}, \mathbf{B} のなす角 θ の $\sin \theta$ を掛けたものである。したがって

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (8.4)$$

になる。外積、クロスプロダクトともいう。

● \mathbf{A} の発散

第8章 マクスウェル方程式の美しさ

ベクトル場 A の発散（ダイバージェンス，湧出：ゆうしゅつ，わきだし）の記号は $\operatorname{div} A$, $\nabla \cdot A$ であり（ ∇ はナブラと読む），定義は

$$\operatorname{div} A \equiv \nabla \cdot A \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (8.5)$$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (8.6)$$

である。空間のある点に A で表される量がどれだけ流入しているか，あるいは流出しているかを示す。

● A の回転

ベクトル場の回転（ドイツ語では rotation，英語では curl）とは，ある点の周りで回転しようとするものを表している（たとえば力など）。これを表すのに $\operatorname{rot} A$, $\operatorname{curl} A$, $\nabla \times A$ などを使う。

$$\operatorname{rot} A \equiv \operatorname{curl} A \equiv \nabla \times A \quad (8.7)$$

物理的意味は

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (8.8)$$

行列式を用いて

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (8.9)$$

と表すことができる。

● ϕ の勾配

$y = f(x)$ において dy/dx が接線の傾きであった。これを 3 次元に拡張する。 $\phi(x, y, z)$ をスカラー関数とする。 x, y, z 方向の傾きを成分とするベクトル

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (8.10)$$

を ϕ の**勾配**という。記号は $\text{grad } \phi$ または $\nabla \phi$ である。演算子としては

$$\text{grad} = \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (8.11)$$

のようになる。 ϕ の勾配は

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (8.12)$$

である。

●その他の関係

ベクトル解析でよく使う式を挙げておこう。

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (8.13)$$

$$\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \phi \quad (8.14)$$

第 8 章 マクスウェル方程式の美しさ

ここで Δ は**ラプラシアン**という。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \quad (8.15)$$

$$\text{rot grad } \phi = 0 \quad (8.16)$$

である。

また、**ダランベルシャン**として

$$\begin{aligned} \square &\equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 \end{aligned}$$

を定義する。さらに次の演算子を定義する。

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad : \text{共変ベクトル演算子} \quad (8.17)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad : \text{反変ベクトル演算子} \quad (8.18)$$

$$\partial^\mu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} \partial_\nu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu$$

ここで、1 つの式の中で繰り返される同一ギリシャ文字の添字は和をとる約束である。

$$\partial^0 = -\partial_0, \quad \partial^k = \partial_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8.19)$$

8.2 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式 (MKSA 単位系) は

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{ファラデー・レンツの法則})$$

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{アンペールの法則の拡張})$$

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (\text{磁荷は存在しない})$$

ただし

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H \quad (8.20)$$

である。ここで

E : 電界の強度, H : 磁界の強度, D : 電束密度, B : 磁束密度,
 j : 電流密度, ρ : 電荷密度, ϵ : 誘電率, μ : 透磁率

次に

A : ベクトルポテンシャル, φ : スカラーポテンシャル
 を導入して, これらを電界と磁界を変化させないようなベクトルおよびスカラーポテンシャルとしよう。そのためには

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \operatorname{rot} A \quad (8.21)$$

で与えられるものとする。下に示すように物理的な場 E, B が与えられてもポテンシャル A, φ は一意的には定まらない。 E, B , した

第8章 マクスウェル方程式の美しさ

がって、マクスウェル方程式を同じ形に保ったまま A, φ を変える操作のことを**ゲージ変換**という。これに対応して、マクスウェル方程式が不変であることを**ゲージ不変性**という。

マクスウェル方程式を (A, φ) を使って表現しようとするときに現れるのが「ゲージ」という自由度である。たとえばマクスウェル方程式の一つである

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (8.22)$$

から

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (8.23)$$

と表しても上の式は満たされる。理由は

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (8.24)$$

だからである。しかし、 \mathbf{A} は一義的には定まらず、任意の χ に対して常に

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0 \quad (8.25)$$

であるので、 χ をゲージとして

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi \quad (8.26)$$

も正しい \mathbf{B} を与える。ここで \mathbf{A} から \mathbf{A}' に移る変換を**ゲージ変換** (Gauge transformation) という。 \mathbf{B} はゲージ変換に対して不変である。

8.3 ゲージの凍結

次に、ゲージ χ の不定性の凍結のために、次のような補助条件をつけておくことができる。

(a) クーロンゲージ

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (8.27)$$

か

(b) ローレンツゲージ

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (8.28)$$

である。これらについて見ておこう。

§8.3.1 クーロンゲージ (Coulomb gauge)

ゲージ変換として

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \chi = 0 \quad (8.29)$$

となるような χ をとることもできる。そのためには

$$\nabla^2 \chi = \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (8.30)$$

を満たす χ を求めればよい。この χ で変換された φ', \mathbf{A}' すなわち

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi \quad (8.31)$$

第 8 章 マクスウェル方程式の美しさ

を改めて φ, A と表すと、後に示すように、 φ, A で表したマクスウェル方程式は

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.32)$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = -\mu j \quad (8.33)$$

が得られる。ただし**クーロン条件**

$$\text{div } A = 0 \quad (8.34)$$

が加わる。上式の φ を**グリーン関数**を使って解くと

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t) d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (8.35)$$

となってクーロンポテンシャルと同じになる。このとき「クーロンゲージをとった」という。

ゲージ変換に対して不変な方程式だけが物理的に意味がある。

荷電粒子と電磁場の相互作用は、式の中にポテンシャルが現れて式の形が変わってしまうことがあるが、荷電粒子に関係した量にも、あるゲージ変換を行えば、全体としては、この同時に行う 2 つのゲージ変換に対して不変になっている。

マクスウェル方程式を A, φ を用いて表してみよう。

$$\text{rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (8.36)$$

すなわち

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{j} \quad (8.37)$$

の式に (8.21) を代入して

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{j} \quad (8.38)$$

となる。左辺第 1 項は $-\nabla^2 \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}$ なので

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{j} \quad (8.39)$$

ここで

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (\text{ローレンツ条件}) \quad (8.40)$$

とおき, 光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ を用いると, \mathbf{A} に対する式として

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (8.41)$$

が得られる。また

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (8.42)$$

の式を \mathbf{E} の式に直した

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.43)$$

第8章 マクスウェル方程式の美しさ

より

$$\operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.44)$$

となり, これは

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.45)$$

と表せる。この式に

$$-\epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (8.46)$$

を加えて

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.47)$$

となる。第3項は上の条件 (8.40) から 0 であるので, φ に対する式として

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.48)$$

が得られる。

§8.3.2 ローレンツゲージ (Lorentz gauge)

前述のように, A, φ によるマクスウェル方程式として

$$\nabla^2 A - \epsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu j \quad (8.49)$$

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.50)$$

が得られ、これらの式にローレンツ条件 (8.40) をおいて式を簡単化できる。これについて述べる。

ゲージ変換による式で、(8.40) のようにすれば簡素化できるが、これを

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \chi + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.51)$$

とするには

$$\nabla^2 \chi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8.52)$$

となる χ を求めればよい。こうなるような χ によるゲージ変換は

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi \quad (8.53)$$

および

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8.54)$$

となる。 \mathbf{A}', φ' をあらためて \mathbf{A}, φ と表わして最終的に

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (8.55)$$

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.56)$$

が得られ、また、 A, φ に対する条件として

$$\operatorname{div} A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (8.57)$$

となって、電磁場のポテンシャルに対するローレンツ条件 (8.40) が得られた。 χ を決める非斉次方程式の一般解には、斉次式

$$\nabla^2 \chi_0 - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} = 0 \quad (8.58)$$

の解 χ_0 の任意性がある*1。したがって、ゲージ関数 χ を

$$\chi' = \chi + \chi_0 \quad (8.59)$$

とおいても A, φ で表した上記のマクスウェル方程式は変わらない。ポテンシャルがローレンツ条件を満たすとき、「ローレンツゲージをとった」という。

8.4 マクスウェル方程式の4元ポテンシャル表示

また、前述の

$$\nabla^2 A - \epsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu j \quad (8.60)$$

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} A + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.61)$$

*1 斉次方程式の一般解に非斉次方程式の特解を加えたものがもとの式の一般解である。

§8.4 マクスウェル方程式の 4 元ポテンシャル表示

において、**自然単位系**を用いた 4 元ポテンシャル

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (8.62)$$

と、4 元電流密度

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (8.63)$$

および (8.17) で定義された

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (8.64)$$

を導入すると、 \mathbf{A}, φ に対する 2 つのマクスウェル方程式は一つになり

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = -\mu_0 j^\mu \quad (8.65)$$

で表される。ローレンツゲージ

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (8.66)$$

のもとでは

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu \quad (8.67)$$

となる。非常に単純な、美しい式である。

マクスウェル方程式の**ゲージ不変性**は

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

第 8 章 マクスウェル方程式の美しさ

とすれば成り立っていることがわかる。

ゲージ変換については、量子力学の手法 $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi$ を加えて §15.5 節でもう一度詳しく触れる。

第9章

ディラック方程式を解く

運動方程式は、時間 t と空間 r に関して対称で、1 階の微分方程式でなければならないことを §5.2 で示した。この他に、電子などにはスピンもあるので、これを考慮に入れなければならない。これらを総合したものが、相対論的量子力学、**ディラック** (P. Dirac) により導かれた方程式である。この方程式を解くと、反粒子の解も得られる。ここでは、**ディラック方程式**とそれの解き方の例について述べる。

9.1 スピノル

電子は**スピン**といわれる**内部角運動量**をもっている。これは、たとえていうならば、電子が右回りに自転しているか、左回りに自転しているかによる状態の違いを表している。古典的な**角運動量** L は、粒子の動径ベクトルを r 、運動量を p として

$$L = r \times p \quad (9.1)$$

で表される。スピンの場合も同様に、左回りなら上向き、右回りなら下向きの**内部角運動量**（スピン）をもつ。この自転によるスピンの角運動量を S と表す。

第9章 ディラック方程式を解く

スピンがあるときの平面波を

$$\Psi = u \exp \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et) \quad (9.2)$$

とする。ただし

$$u \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

とおき、 $|a|^2$ はスピンの上向きの確率、 $|b|^2$ はスピンの下向きの確率を表す。上、下の確率の和は、それがすべてであるから

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (9.4)$$

である。上向きだけの電子なら

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

下向きだけなら

$$u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

と表す。これらを用いると

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = au_+ + bu_- \quad (9.7)$$

となる。ここで表示した u を **2成分スピノル** という。

荷電をもつ素粒子が自転していると、自転軸の周りに円形電流が流れていることになり、自転軸方向に磁界を生じる。外部から磁界を加えると、スピンによって発生した磁界と外部磁界との相互作用があり、電荷 Q 、質量 m の粒子が自転角運動量 S をもつときには、この粒子の**磁気モーメント** μ は

$$\mu = \frac{gQ}{2mc} S \quad (9.8)$$

で与えられる。電子では $Q = -e, g$ の測定値は 2 である。電子がスピンをもっていることは次のような実験からわかった。

電子ビームの方向に x 方向をとり、外部磁界の方向を y 方向とし、自転軸方向が $+y$ または $-y$ 方向とすると、エネルギーは外部磁界 B と磁気モーメントとの相互作用により

$$E = -\mu \cdot B = \pm \frac{ge}{2mc} SB \quad (9.9)$$

で与えられる。磁界の強さが y の値によって変わるときには E は y の関数になり

$$F_y = -\frac{\partial E}{\partial y} = \mp \frac{geS}{2mc} \frac{\partial B}{\partial y} \quad (9.10)$$

の力が電子に働く。その結果、ビームは 2 つに分離することが確かめられた。さらにビームの曲げられる力の大きさは

$$gS = \hbar \quad (9.11)$$

であること、および $g = 2$ であることから $S = \frac{1}{2}\hbar$ であることもわかった。

9.2 スピン行列

スピン角運動量 S の交換関係は、通常の**角運動量 L の交換関係**と同じとする。交換関係は、演算の順序を逆にするとお釣りが出てくるようなものである。通常の算数では 2×3 でも 3×2 でも同じであって、両方とも答えは 6 となるが、量子力学では順序を入れ換えると結果が違ふ場合にしばしば出合う。演算の順序を入れ替えるとうどうなるかを定式化する。これを交換関係といい、これを定義する。

$$[A, B] = AB - BA \quad (9.12)$$

この定義に従ってスピン S の場合も角運動量 L と同様に

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad (9.13)$$

とする。この式を満足するスピン S は、 σ として

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

とすると

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad (9.15)$$

となる。 σ を**パウリのスピン行列**とよぶ。

スピン行列の性質は

$$\begin{aligned}\sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x, \\ \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y\end{aligned}\tag{9.16}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I\tag{9.17}$$

I は単位行列で

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{9.18}$$

である。

次に、スピンの効果が入った波動関数の満たすべき方程式を求める。

9.3 ディラック方程式

アインシュタインの相対論的なエネルギーと運動量との関係式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4\tag{9.19}$$

を出発点にとる。ただし、粒子の静止質量を m_0 と置いた。時間、空間とも 1 階の微分方程式でなければならないので、上式を変形

第9章 ディラック方程式を解く

して

$$\begin{aligned} E &= \frac{\boldsymbol{p}^2 c^2}{E} + \frac{m_0^2 c^4}{E} \\ &= \frac{\boldsymbol{p} c^2}{E} \cdot \boldsymbol{p} + \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right) m_0 c^2 \end{aligned}$$

の式を得る。ここでスカラー式

$$\frac{|\boldsymbol{p}|c}{E} = \frac{v}{c} \quad (9.20)$$

(v は粒子の速さ) をもとに

$$\frac{\boldsymbol{p} c^2}{E} = \boldsymbol{v} \quad (9.21)$$

とし, そこでこれを

$$\boldsymbol{\alpha} c \quad (9.22)$$

とおき, さらに

$$\frac{m_0 c^2}{E} \quad (9.23)$$

を β とおき, これらは ψ に作用する演算子と考えると

$$E\psi(x) = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + m_0 c^2 \beta)\psi(x) \quad (9.24)$$

の式を得る。ここで x は 4 次元座標 (ct, \boldsymbol{r}) である。上式を**ディラック方程式**という。また,

$$H \equiv c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + m_0 c^2 \beta \quad (9.25)$$

はハミルトニアンとよび、方程式は

$$E\psi(x) = H\psi(x) \quad (9.26)$$

の形をしている。

ディラック方程式の中の4つの係数 β と α_i ($i = 1, 2, 3; x, y, z$) は、相対論的關係

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (9.27)$$

から求めた**クライン・ゴルドンの方程式** (5.40) の運動量による表示,

$$E^2 \psi = (p^2 c^2 + m_0^2 c^4) \psi \quad (9.28)$$

を満たさなければならないことから決定される。

ディラックの方程式から $E \times E$ をつくと

$$E^2 \psi = (c\alpha_i p_i + \beta m_0 c^2) \times (c\alpha_j p_j + \beta m_0 c^2) \psi \quad (9.29)$$

$$(i, j = 1, 2, 3 \text{ についてそれぞれの和}) \quad (9.30)$$

である。よって上式 (9.28) は

$$E^2 \psi = \left\{ c^2 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + c(\alpha_i p_i \beta m_0 c^2 + \beta \alpha_j p_j m_0 c^2) + \beta^2 (m_0 c^2)^2 \right\} \psi \quad (9.31)$$

第9章 ディラック方程式を解く

と表せる。第1項は $i = j$ のときと, $i \neq j$ の場合に分けて書く。第2項は α_i と β との**反交換関係**なので $i = j$ の場合を考えて上式は

$$= \left\{ c^2 \alpha_i^2 p_i^2 + \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j \right. \\ \left. + c (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m_0 c^2 + \beta^2 (m_0 c^2)^2 \right\} \psi \quad (9.32)$$

となる。第2項は i, j で重複するので $1/2$ にしてある。この式が、波動方程式 (9.28) になるためには

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &\equiv \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \{\alpha_i, \beta\} &\equiv \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

$i = j$ のときは $\delta_{ij} = 1$, $i \neq j$ のときは $\delta_{ij} = 0$ でなければならない。すなわち

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (9.33)$$

ただし, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ は反可換 (積の順序を変えたものの和 = 0)。 $ab = ba$ の場合を可換という。 α_i や β は可換ではないので単なる数ではない。

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (9.34)$$

になるものは, すでに**パウリのスピン行列**として表したものの (9.14) である。 $(x, y, z) \rightarrow (1, 2, 3)$ として (9.16), (9.17) は

$$\sigma_i^2 = I, \quad \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 = 0 \quad (9.35)$$

となる。 α_i, β が 2 行 2 列の行列で $\alpha_i = \sigma_i$ とすると、この行列で独立なものは $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_i^2$ の 4 つのみである。ところが、 $\beta^2 = 1$ であったので $\beta = I$ とすると

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (9.36)$$

を満たすことはできない。したがって、 α_i, β は 2×2 の行列とは見なされないので、4 行 4 列の行列の可能性を当たってみる。

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

β は

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

とすると、前に示した α_i, β に対する 3 つの条件式を満たすことを示すことができる。この α, β を**ディラック・パウリ表現**という。

したがって、相対論的な波動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta m_0 c^2 \right) \psi \quad (9.39)$$

で与えられる。

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (9.40)$$

にとるやり方もある。これを**ワイル (H. K. H. Weyl) 表現**という。

第9章 ディラック方程式を解く

次に、書き方としての α_i などを改めて α^k と表す。ディラックの方程式

$$E\psi(x) = \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^2 \beta \right) \psi(x) \quad (9.41)$$

を微分形で表すと

$$\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left(-i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_0 c \right) \psi(x) \quad (9.42)$$

となり、これはまた

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \alpha^k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^k} + \frac{im_0 c}{\hbar} \beta \psi(x) = 0 \quad (9.43)$$

とも表せて、これを**ディラックの方程式**ということもある。この式を見ると空間部分は行列の積であるが時間部分はそうはなっていないので、対等な取り扱いにしたい。

すぐ上のディラックの方程式の両辺に $-i\beta$ を掛けて

$$-i\beta \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} - i \sum_{k=1}^3 \beta \alpha^k \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^k} + \frac{m_0 c}{\hbar} \beta^2 \psi(x) = 0 \quad (9.44)$$

これを書き換えて

$$-i\beta \partial_0 \psi(x) - i \sum_{k=1}^3 \beta \alpha^k \partial_k \psi(x) + \frac{m_0 c}{\hbar} \psi(x) = 0 \quad (9.45)$$

ただし (8.17) で定義された ∂_μ を用いた。ここで α^k, β の代わりに γ 行列を使う。

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^k \equiv \beta \alpha^k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (9.46)$$

とすると

$$i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^{\mu}} - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi(x) = 0 \quad (9.47)$$

となる。和の省略記号を用いて

$$\left(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi(x) = 0 \quad (9.48)$$

となる。ファインマンの “dagger” 記法を使えばさらに簡潔になる。 γ 行列の性質をまとめておこう。

$$\gamma^0 \text{はエルミート量, } (\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = +1 \quad (9.49)$$

$$\gamma^k \text{は反エルミート量, } (\gamma^k)^{\dagger} = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad (9.50)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \quad (9.51)$$

9.4 ディラック方程式の解

§9.4.1 静止状態の粒子

ディラック方程式は 4 行 4 列の行列を含むので、解も 4 成分となる。通常、粒子はいくつかの状態からなる。たとえば、運動量が同じでスピンの方向の自由度が異なるなどで、波動関数はこの状態を表す必要がある。

第9章 ディラック方程式を解く

スピン $1/2$ の粒子に対する波動関数を取りあげよう。粒子の状態を列ベクトルで表す。ディラック方程式を満たす 4 成分列ベクトルを、**4 成分スピノル**といい、解は 4 つある。

ディラック方程式

$$E\psi(x) = \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^2 \beta \right) \psi(x) \quad (9.52)$$

の平面波解

$$\psi(x) = \varphi \exp \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et) \quad (9.53)$$

を上式に代入すると

$$E\varphi = \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^2 \beta \right) \varphi \quad (9.54)$$

となって、 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ が 4 行 4 列の行列だから、 φ は 4 成分の列ベクトルとなる。よって

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (9.55)$$

とすると、 u, v はそれぞれ 2 成分スピノルになる。

ここで、運動量がゼロ、すなわち、静止状態の粒子を考える。 φ の方程式で

$$\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (9.56)$$

の場合には

$$E\varphi = m_0c^2\beta\varphi \quad (9.57)$$

であり (9.38) の β より

$$E\varphi = \begin{pmatrix} m_0c^2I & 0 \\ 0 & -m_0c^2I \end{pmatrix} \varphi \quad (9.58)$$

である。これに 2 成分スピノル u, v を代入すると

$$E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0c^2I & 0 \\ 0 & -m_0c^2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (9.59)$$

である。したがって

$$Eu = m_0c^2Iu, \quad Ev = -m_0c^2Iv \quad (9.60)$$

となる。 I は単位行列なので, u, v について上向きスピンの状態を

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.61)$$

で表し, 下向きスピンの状態を

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.62)$$

で表すと

$$E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = m_0c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (9.63)$$

第 9 章 ディラック方程式を解く

$$E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (9.64)$$

が成り立つ。よって

$$E u_1 = m_0 c^2 u_1, \quad E u_2 = m_0 c^2 u_2 \quad (9.65)$$

である。これより、 $E = m_0 c^2$ の粒子 (電子) のスピンの上向き、下向きに対応するのが u_1, u_2 であることがわかる。

同様に $E = -m_0 c^2$ の粒子 (現在では電子の反粒子である陽電子) のスピンの上向き、下向きに対応するのが v_1, v_2 である。 φ で表せば、4 成分スピノルなので、スピンの上下につき

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.66)$$

である。この波動関数に対する固有値はそれぞれ

$$E = m_0 c^2, \quad m_0 c^2, \quad -m_0 c^2, \quad -m_0 c^2 \quad (9.67)$$

である。エネルギーが負の粒子は反粒子であり、時間に逆行する粒子とすれば矛盾がなくなる^{*1}。

*1 $E = -|E|$ で $t = -|t|$ とすれば波動関数は変わらない。このことについては §13.5 で詳述する。

§9.4.2 ディラック方程式の一般解

次に、ディラック方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = H\psi(x) = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^2 \beta) \psi(x) \quad (9.68)$$

で $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ の一般解を求めてみよう。波動関数を

$$\psi(x) = u(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \quad (9.69)$$

と表す。 $\psi(x)$ を、行列による部分と平面波による部分で表した。これをディラック方程式に代入する。方程式の左辺は

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ u(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \right\} \\ = \frac{i\hbar}{c} \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) u(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \end{aligned} \quad (9.70)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} u(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \\ = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c \beta) u(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)\right) \end{aligned} \quad (9.71)$$

となり、 $u(\mathbf{p})$ に関する次の方程式が得られる。

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 c \beta) u(\mathbf{p}) = \frac{E}{c} u(\mathbf{p}) \quad (9.72)$$

第9章 ディラック方程式を解く

4成分の $u(\mathbf{p})$ を2行1列の $u_A(\mathbf{p})$ と $u_B(\mathbf{p})$ に分けて

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_A(\mathbf{p}) \\ u_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (9.73)$$

とおくと、 $u(\mathbf{p})$ に関するすぐ上の式は次のように書き下すことができる。 α, β はそれぞれ (9.37), (9.38) であったから左辺の計算は

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_0 c I & 0 \\ 0 & -m_0 c I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c I & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_0 c I \end{pmatrix} \quad (9.74)$$

であるので

$$\begin{pmatrix} m_0 c I & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m_0 c I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A(\mathbf{p}) \\ u_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} u_A(\mathbf{p}) \\ u_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (9.75)$$

が得られる。この式から次の2つの方程式を得る。

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_B(\mathbf{p}) = \left(\frac{E}{c} - m_0 c \right) u_A(\mathbf{p})$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_A(\mathbf{p}) = \left(\frac{E}{c} + m_0 c \right) u_B(\mathbf{p})$$

これらを解くために、次の準備をしておこう。 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり, \boldsymbol{p} の 3 成分を p_1, p_2, p_3 とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} &= \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_2 \\ ip_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & -p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

本来の解くべき式の第 2 式から入ろう。スピンの上向きと下向きの状態を表すものとして, 独立な $u_A(\boldsymbol{p})$ を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

とする。(9.67) の $E > 0$ のときの解は, 2 つの独立なものとして

$$u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{\frac{E}{c} + m_0 c} \\ \frac{p_1 + ip_2}{\frac{E}{c} + m_0 c} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1 - ip_2}{\frac{E}{c} + m_0 c} \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (9.77)$$

が得られる。ここで N は規格化定数である。

第9章 ディラック方程式を解く

同様にして $E < 0$ のときの解が求まり、これを $u^{(3)}(\mathbf{p})$, $u^{(4)}(\mathbf{p})$ とすれば

$$u^{(3)}(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-p_3}{\frac{|E|}{c} + m_0 c} \\ \frac{-p_1 - ip_2}{\frac{|E|}{c} + m_0 c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)}(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-p_1 + ip_2}{\frac{|E|}{c} + m_0 c} \\ p_3 \\ \frac{|E|}{c} + m_0 c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.78)$$

規格化定数は

$$N = \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \quad (9.79)$$

で与えられる。

ディラック方程式は、空間的な広がりが無い点状粒子に適用されるものである。したがって、点状粒子とされている物質粒子のレプトンやクォーク（大きさは 10^{-18} m 以下）に当てはまる。大きさがおよそ 10^{-15} m の陽子や中性子に対しては、近似的に取り扱うことができる。この際、粒子の概念的なものは成り立っている。たとえば、粒子と反粒子の関係などはよく成り立っていて、陽子と反陽子、中性子と反中性子などがそれである。もっとも、陽子と反陽子の関係は、その組成である3つのクォーク (uud) と3つの反クォーク ($\bar{u}\bar{u}\bar{d}$) の関係に着目し、これらを独立とみなせば、ディラック粒子としての粒子・反粒子の関係に帰結できる。

第 10 章

C, P, T 変換の対称性

粒子とその反粒子を交換すると、それらに成り立つ物理法則の何と何が変わるのか、あるいは変わらないのか。また、空間座標の符号や時間の符号を変えたときの物理法則がそのまま成り立つかどうか、すなわちこれらの変換に対する対称性を見てみよう。

10.1 物理法則の不変性

ある物理法則があり、それに含まれる座標や電荷などの物理量の符号を変えたとき、もとの物理法則がそのまま成り立つかどうかということに関してはあまり自明ではない。たとえば、空間の回転という変換に対して物理法則は形を変えない。なぜなら、空間には特別な方向性がないので、常に空間の回転に関しては対称であり不変である。ところが、空間の座標の符号を変える、すなわち空間反転に対しては物理法則が不変であるかどうかは保証の限りではない。不変であるかもしれないし、そうでないかもしれないという不確定さは残る。

素粒子物理学で重要な変換には、次の三つがあげられる。

1. **荷電共役変換** (Charge conjugation) 略して **C 変換**という。粒子を反粒子に、または、その逆の反粒子を粒子にする変換のこ

とである。

2. **空間反転 (Parity transformation)** 略して P 変換。パリティ変換ともいう。空間座標 \mathbf{r} の符号を変えて $-\mathbf{r}$ にする変換のことである。成分で表すと (x, y, z) を $(-x, -y, -z)$ にする変換である。
3. **時間反転 (Time reversal)** 略して T 変換。時間座標 t の符号を変えて $-t$ にする変換のことである。

変換は C, P, T 単独のこともあれば、これらを組み合わせて CP, PT, CT, CPT 変換とすることもできる。これらの組み合わせ変換の場合は、組み合わせる順序にはよらない。 CP と PC 変換は同じ変換になる。

10.2 CPT 定理

CPT 変換 (C, P, T 変換すべてを施す変換) 以外の C, P, T およびその組み合わせ変換での不変性が保障されていない場合でも、 CPT 変換ではまったく対称で不変であるというのがこの定理の内容である。また、 CPT 定理は 1949 年にパウリによって証明された。

現在のところ、この定理に反する実験事実は 1 つもなく、この定理は成り立っている。粒子・反粒子については、 CPT 不変性の結果、すべての粒子には対称性のゆえに反粒子が存在すること、粒子と反粒子の質量と寿命とが等しく、粒子と反粒子では荷電などの符号付量子数が逆符号であることなどが成り立っている。

10.3 パリティ変換 (P 変換)

すべての空間座標の符号を変えるもので、空間反転ともいう。3次元空間ベクトル \mathbf{r} があり、直交座標成分を (x, y, z) とする。 \mathbf{r} の P 変換は

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \quad (10.1)$$

にする変換であり、成分で表すと $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ である。 P 変換に伴って運動量も符号が変わる。すなわち

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (10.2)$$

であるから、 \mathbf{r} の符号が変わる変換なので \mathbf{p} の符号も変わる。運動量の成分で表すと $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow (-p_x, -p_y, -p_z)$ である。スピン角運動量の P 変換は、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の P 変換と同じなので

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (10.3)$$

となり、符号は変わらない。

パリティ変換は、鏡に映す操作と同様のことである。したがって、「右」と「左」が対称であるかどうかの対称性の問題となる。**パリティ不変性**は、右と左は対称であり、右を左に変換しても世界は変わらないことをいう。

§10.3.1 パリティの固有値

強い相互作用と電磁相互作用では、パリティ（偶奇性）が保存するので、その固有値が定義できる。パリティ変換の演算子を P とする。陽子 p と中性子 n の総称は核子 N であった。**核子**は大きさが約 10^{-15} m で構造をもち、1 つの核子から 1 つの π 中間子が放出され、この π 中間子を別の核子が吸収することによって**核力**が生じた。しかし、付近に別の核子が存在しない単独の核子の場合、放出された π 中間子は不確定性関係で許される時間の後には、元の核子に吸収される。このときの π 中間子のような粒子を**仮想粒子**という。これを図 10.1 に示す。 π 中間子が放出された状態を $N \rightarrow N' + \pi$ と表すことができる。核子の波動関数を $|N\rangle$ 、 π 中間子の波動関数を $|\pi\rangle$ と表す。 π 中間子のパリティ固有値を η_π とすると、

$$P|\pi\rangle = \eta_\pi|\pi\rangle \quad (10.4)$$

と書ける。

もう一度変換を行うと、もとの $|\pi\rangle$ となるので

$$P^2|\pi\rangle = \eta_\pi^2|\pi\rangle = |\pi\rangle \quad (10.5)$$

であり、 $\eta_\pi^2 = 1$ より $\eta_\pi = \pm 1$ となる。現実の素粒子は、パリティの固有値として +1 または -1 のどちらであろうか。

通常の素粒子のパリティは、基準となるものとして陽子や電子のパリティを便宜上 +1 とし、他の粒子のパリティは、強い相互作用

§10.3 パリティ変換 (P 変換)

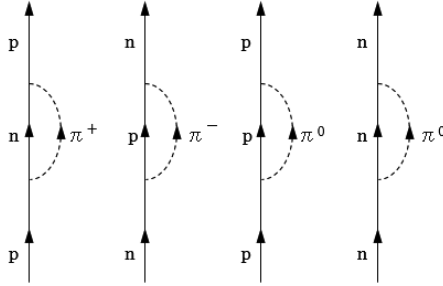


図 10.1: 仮想 π 中間子

と電磁相互作用の反応から定める。したがって、パリティの正負は相対的なものである。

例を挙げてみよう。 Δ^{++} 粒子のパリティの固有値 η_{Δ} はいくらになるだろうか。強い相互作用である

$$\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^{+} \quad (10.6)$$

の崩壊において、陽子のパリティを $+1$ としたので

$$\eta_{\Delta} = 1 \times (-1)^l \eta_{\pi} \quad (10.7)$$

である。 l は軌道角運動量である。 Δ^{++} のスピンは $3/2$ 、陽子が $1/2$ 、 π 中間子が 0 であるので、 p と π の間の軌道角運動量 l は 1 と予想され、実験でも 1 であることがわかった。したがってもし $\eta_{\pi} = -1$ ならば^{*1}、 $\eta_{\Delta} = 1 \times (-1)^1 \times (-1) = 1$ となり、 Δ^{++} のパリティは陽子と同じ $+1$ である。

^{*1} 実際 §6.2.2 で考察した $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ という反応からこれは確かめられる。

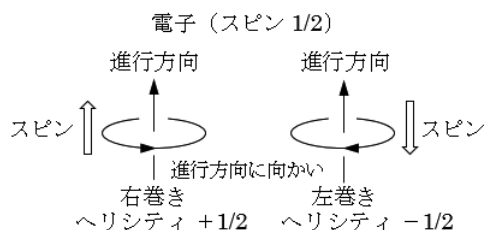


図 10.2: 電子のヘリシティ

§10.3.2 パリティ非保存の問題

一般に、粒子はスピンをもち、ボーズ粒子は整数、フェルミ粒子は半整数スピンをもつ。粒子が運動している場合は、運動方向のスピン成分があり、これを**ヘリシティ**という。スピン S と運動量 p によりヘリシティ h は

$$h = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (10.8)$$

で定義される。ヘリシティはスピンの成分が粒子の進行方向を向いているときは正であり、スピンの成分が粒子の進行方向と逆方向になるときには負である。図 10.2 に電子のヘリシティを示す。電子のヘリシティは $+1/2, -1/2$ をもち、それぞれ**右巻き成分**、**左巻き成分**という。**右巻き・左巻き**の違いは、右ねじ・左ねじに由来している。右ねじの頭を回したときにねじ全体がねじの進行方向になるように回るのが、右回り・右巻きになる。

光子はスピンが 1 であるからヘリシティは $+1, -1$ で、それぞれ**右巻き**、**左巻き光子**という。質量のある粒子は、系のとり方によっ

§10.3 パリティ変換 (P 変換)

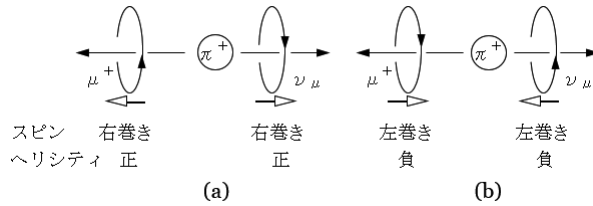


図 10.3: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ 崩壊での μ^+, ν_μ のスピンの (a) 両方とも右巻き, (b) 両方とも左巻きのときの図

てヘリシティの符号が変わる。右巻きの粒子でも、この粒子より速く進行している系から見ると、粒子が逆方向に進むので左巻きになる。光子のように、はじめから光速で進んでいる粒子は、右巻きはどのような系から見ても右巻きで、粒子に固有の量である。後で示すように、パリティ対称性は破れている。パリティが破れていることにより、世界には右と左の区別があることがわかった。

標準モデルでは質量 0 のフェルミオンはニュートリノだけであり、ニュートリノは左巻き、反ニュートリノは右巻きになっている。実際には、ニュートリノが左巻きであることは次のようにしてわかった。崩壊式

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (10.9)$$

において、 π^+ はスピン 0 なので、全角運動量の保存から μ^+ と ν_μ は逆向きのスピンをもたなければならない。ところが π^+ の崩壊で出てくる 2 粒子は互いに 180° 方向なので、ヘリシティは同符号である (図 10.3)。図の (a) は μ^+, ν_μ とも右巻きであり、図の (b) は、 μ^+, ν_μ とも左巻きである。

第 10 章 C, P, T 変換の対称性

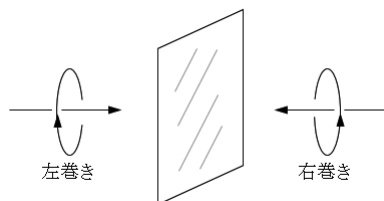


図 10.4: 鏡に映った世界

実験で μ^+ のヘリシティを決めれば ν_μ のヘリシティも定まる。結果は、 μ^+ のスピン測定から、 ν_μ のヘリシティが $-1/2$ であることがわかり、ニュートリノが左巻きであることが判明した。

このように、崩壊のような弱い相互作用では、左巻きニュートリノしか関与しないこととなった。すなわち、**弱い相互作用の世界では左巻きニュートリノ、右巻き反ニュートリノ**しか反応にあずからないという極めて重要な事実がわかった。左右の対称性の破れは、普通の我々の世界と、鏡に映った世界を区別できることで、これは驚くべきことであった。

図 10.4 のように、鏡に映った世界では右巻きは左巻きになる。弱い相互作用がパリティ変換に対して不変なら、右巻き粒子にも作用し右左の区別はないはずであった。

歴史的には、1956 年に李 (リー; T. D. Lee) と楊 (ヤン; C. N. Yang) が弱い相互作用では空間反転の対称性が破れていてもよいことを予言し、翌年に呉 (ウー; C. S. Wu) 女史などの実験で確かめられた。

§10.3 パリティ変換 (P 変換)

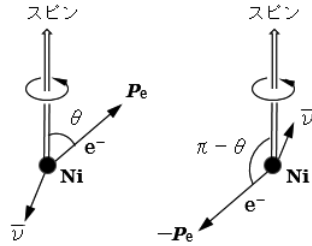
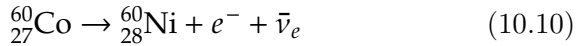


図 10.5: ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$ で ${}^{60}_{27}\text{Co}$ のスピンの対し θ 方向と $\pi - \theta$ 方向に発生する電子

実験はコバルト 60 の崩壊過程



において、低温に保ち、磁場をかけてコバルトのスピンをそろえておき、崩壊して発生する電子がコバルトのスピンの向き（磁場方向）に発生する割合と、逆向きに発生する割合とを比較した。その結果、逆向きに発生する電子の方が多かった。

この崩壊の様子を図 10.5 に示す。S を ${}^{60}_{27}\text{Co}$, ${}^{60}_{28}\text{Ni}$ のスピンとする。崩壊式 (10.10) において、コバルトのスピンは $S = 5$ 、ニッケルのスピンは $S = 4$ である。スピン方向に対して θ 方向に電子が発生するものが、パリティ変換により $\pi - \theta$ 方向に発生する。

図 10.6 に崩壊のスピンの状況を示す。コバルト 60 のスピンは 5 であり、ニッケル 60 のスピンは 4 なので、角運動量の保存から崩壊して発生する電子と反ニュートリノのスピンの合計は 1 で、ニッケル 60 のスピンと同じ方向を向いていなければならない。図では電子が Co のスピンと逆方向に発生するものを表している。こ

第 10 章 C, P, T 変換の対称性

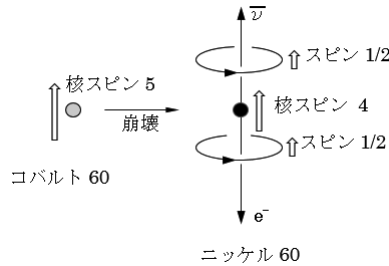


図 10.6: コバルト 60 の崩壊時のスピンの状況

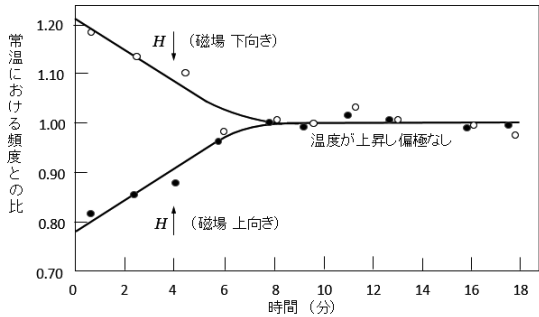


図 10.7: コバルト 60 崩壊に伴う発生電子スピン方向の頻度

C. S. Wu et al., Phys. Rev. 105, 1413 (1957) を参照して作図

の実験の結果を図 10.7 に示す。図 10.6 から反ニュートリノは右巻きである。すなわち、弱い相互作用は、右巻き反ニュートリノ、ないしは左巻きニュートリノと反応を起こす結果となった。

他の星の知的存在に、右と左の区別を電磁波による交信だけで伝えることができるかという問題では、式 (10.9) で示された π^+ の崩壊でできる μ^+ は 100% 左巻きであり、それゆえ、この崩壊でできる μ^+ は左巻きであることを伝えればよい。

10.4 荷電共役（荷電反転，C 変換）

C 変換は、粒子を反粒子に、反粒子を粒子にすることを意味する。 π^0 や γ などの粒子は自分自身が反粒子でもある。このことと、強い相互作用と電磁相互作用では、C 変換の対称性が成り立っているので、パリティ変換と同様に C パリティをもつ。 π^0 の C パリティは +1 である。これは $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ 反応から推察できる。光子の C パリティは -1 なので、これが 2 つだから +1 である。

ω^0 メソンはスピンの 1 で C パリティが -1 である。したがって、次の過程は禁止される。

$$\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \quad \omega^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (10.11)$$

弱い相互作用では C 変換も破れている。ニュートリノは、弱い相互作用をする粒子である。ニュートリノは左巻きであり、C 変換により反ニュートリノになる。C 変換ではスピンの向きは変わらないから左巻き反ニュートリノになる。しかし、現実には反ニュートリノは右巻きであり、左巻き反ニュートリノは存在しない。すなわち、弱い相互作用では荷電共役変換は破れていることになる。

さらに $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ は左巻きの μ^+ 、左巻きの ν_μ であるが、この反応に C 変換すると $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ である。この結果、 $\mu^+ \rightarrow \mu^-$ 、 $\nu_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ に入れ代るが、スピンの向きは変わらないので、左巻きの μ^- 、左巻きの $\bar{\nu}_\mu$ となる。左巻きの $\bar{\nu}_\mu$ は存在しないから C 変換は破れている。この状況を図 10.8 に示す。

以上の例のように、弱い相互作用は C 変換に対しても破れて

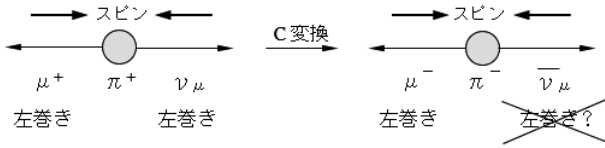


図 10.8: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ の C 変換

いる。

10.5 CP 変換

P 変換, C 変換は弱い相互作用では破れていることを示してきたが, P 変換, C 変換の積に対してはどうであろうか。

1964 年のクローニン (J. Cronin) とフィッチ (V. Fitch) などの実験は, CP 不変性もわずかながら破れていることを示した。

宇宙に目を転じれば, 星や銀河を含むこの宇宙は物質だけでできていて, **反物質**は極端に少ないことがわかってきた。極めて大きな宇宙の非対称性である。ビッグバンで始まった初期宇宙は超高温で, 光子がクォーク・反クォークの対生成を行い, それらの間が平衡に達していた。宇宙が急速に膨張していき, 温度が下がってくるとこの平衡が破れて物質は重力によって星となり銀河となり, 光子は現在 3 K の宇宙背景輻射となって残っている。この宇宙には圧倒的な数の粒子が存在し, 反粒子はほとんどないことを CP の破れで説明できる。初期宇宙のある時期に $\gamma \leftrightarrow q\bar{q}$ のバランスを崩したのが CP の破れとなる。

ここで, **中性 K 中間子**を取り上げてみよう。 $K^0(d\bar{s})$ と $\bar{K}^0(\bar{d}s)$ は,

それぞれストレンジネス S が 1 と -1 の粒子である。 K^0 または \bar{K}^0 は、ストレンジ粒子の中で最も軽い。したがって、ストレンジネスを保存したままで他の粒子に崩壊することはできないので、ストレンジネスの保存を破る弱い相互作用で崩壊する。弱い相互作用では、ストレンジネスの概念がないので、 K^0 か \bar{K}^0 であるかの区別がなくなってしまう。それゆえ、 K^0 と \bar{K}^0 が混じり合った 2 つの状態になり、おのおのが異なった質量、寿命、崩壊モードなどをもった別の粒子として振る舞う。

K^0, \bar{K}^0 粒子状態を表すのにディラックの**ケットベクトル記号** $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ を用いる。 K^0, \bar{K}^0 に CP 変換をする。

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (10.12)$$

と定義する。 $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ の CP 反転に対する固有状態は $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ ではない。

あらためて $|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle$ の混合状態として、これらの対称および反対称な一次結合を考えて

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (10.13)$$

とすると、これらが CP 変換の固有値 $+1$ および -1 の固有関数に

なる。

$$\begin{aligned}
 CP|K_1^0\rangle &= CP\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)\right] = C\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)\right] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle)\right] \\
 &= +|K_1^0\rangle \\
 CP|K_2^0\rangle &= -|K_2^0\rangle
 \end{aligned}$$

このような K_1^0, K_2^0 が存在し、これらは本質的に異なる粒子である。すなわち、強い相互作用で創られるときには K^0, \bar{K}^0 の状態であるのに、弱い相互作用で反応するときには K_1^0, K_2^0 の状態になっている。これは実に CP 不変性による。 K^0, \bar{K}^0 粒子は、スピンの 0 であるから崩壊して $2\pi, 3\pi$ になるものとして、許される CP の固有値は、それぞれ $+1$ か -1 である。

$(\pi^+, \pi^-), (\pi^0, \pi^0)$ は固有値 $+1$,

$(\pi^+, \pi^-, \pi^0), (\pi^0, \pi^0, \pi^0)$ は固有値 -1

である。不変性が保たれているとすると、 K_1^0, K_2^0 が π に崩壊するモードとして

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \dots \quad (10.14)$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \dots \quad (10.15)$$

の崩壊モードをもち、 K_1^0, K_2^0 は別々の粒子である。

以上は 不変性が保たれているとしての話である。しかし、1964 年にこれがわずかに破れている実験事実が見つかった。したがって、

K_1^0 も稀に $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ に崩壊し,

K_2^0 も稀に $\pi^+ + \pi^-$ に崩壊

することがわかった。すなわち, CP **不変性の破れ**である。したがって, 中性 K 中間子は K_1^0, K_2^0 状態になっているというのも正しくない。 K_1^0, K_2^0 の質量差はほとんどなく K^0, \bar{K}^0 の質量にほぼ等しい。 K_1^0, K_2^0 の崩壊モードの違いは, 計算上, その寿命の違いになることがわかる。長寿命の粒子が 2π に崩壊することを見つけたのがクロニンたちの CP を破る実験であった。すなわち, 現実の粒子は CP の固有状態になく, わずかに他の状態が混じったもので,

- 主として 2 つの π に壊れるものを K_S^0
- 主として 3 つの π に壊れるものを K_L^0

と呼ぶ。添え字 S, L は短寿命 (Short life time), 長寿命 (Long life time) の意味である。したがって, 現実には観測される中性 K 中間子は, K_1^0, K_2^0 ではなく K_S^0, K_L^0 となる。これは

$$\begin{aligned} |K_S^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left(|K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\epsilon^2)}} \left((1+\epsilon) |K^0\rangle + (1-\epsilon) |\bar{K}^0\rangle \right) \\ |K_L^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left(|K_1^0\rangle - \epsilon |K_2^0\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\epsilon^2)}} \left((1-\epsilon) |K^0\rangle + (1+\epsilon) |\bar{K}^0\rangle \right) \end{aligned}$$

と書くことができ, ϵ は CP の破れを表すパラメータである。 $\epsilon = 0$ のときに K_S^0, K_L^0 と K_1^0, K_2^0 とが等しくなり CP 変換の固有状

第 10 章 C, P, T 変換の対称性

態になる。ここで実験値は

$$|\epsilon| = (2.271 \pm 0.017) \times 10^{-3} \quad (10.16)$$

と求められた。また、 CP の破れは K_S^0, K_L^0 が 2π に壊れるときの振幅の比で表され、現時点では

$$|\eta_{+-}| = \left| \frac{A(K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} \right| = (2.269 \pm 0.023) \times 10^{-3} \quad (10.17)$$

である。さらに、

$$|\eta_{00}| = \left| \frac{A(K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)} \right| = (2.259 \pm 0.023) \times 10^{-3} \quad (10.18)$$

である。

上記の CP の破れは K_L^0 の状態に、違う CP の固有状態が混じった、間接的 CP の破れであったが、直接破るメカニズムを考えることができる。このパラメータを ϵ' とすると

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon', \quad \eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon' \quad (10.19)$$

と関係付けられる。このことから

$$\epsilon = (2.266 \pm 0.023) \times 10^{-3} e^{i(44.0 \pm 1.5)}, \quad (10.20)$$

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = (1.5 \pm 0.8) \times 10^{-3} \quad (10.21)$$

となった。 CP の破れは理論的にも実験的にも種々の問題をかかえている。

10.6 時間反転 (T 変換)

時間は一方向に流れて決して逆戻りすることはないが、物理法則は時間反転, $t \rightarrow -t$ に対しては不変であるかのように見える。たとえばニュートンの方程式

$$F = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (10.22)$$

は時間の2回微分 ($d(-t) \times d(-t) = dt^2$) なので不変である。ところが, CP 変換に対しては不変ではないことの例を前節で示した。すると CPT 定理により CPT で不変でなければならないので, CP で破れていれば T でも破れていなければならない, CPT 全体では不変である。

時間反転の実験はきわめて困難で、長い間達成することはできなかった。ところが、1998年にこの直接的な実験が2つ、CERNとフェルミ研究所でなされた。前者について見てみよう。

ストレンジネスが $+1$ の $K^0(S = 1)$ と、ストレンジネスが -1 の $\bar{K}^0(S = -1)$ 粒子は、強い相互作用ではストレンジネスの変化が $\Delta S = 0$ であるので、 K^0 と \bar{K}^0 はまったく独立な別の粒子である。しかし、弱い相互作用では $\Delta S = 1$ または $\Delta S = 2$ も許されるので、 K^0 と \bar{K}^0 は互いに入れ代わることができる！

$$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0 \quad (10.23)$$

すなわち、強い相互作用で作られた純粋の K^0 ビームでも、時間の経過とともに一部 \bar{K}^0 に変わって行く。

第 10 章 C, P, T 変換の対称性

時刻 0 で K^0 が生成され、時刻 t に \bar{K}^0 として現れる確率を $P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0 : t)$ とする。 T 変換に対する不変性が成り立つならば

$$P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0 : t) = P(\bar{K}^0 \rightarrow K^0 : t) \quad (10.24)$$

のはずである。ところが、実験結果は

$$\frac{P(\bar{K}^0 \rightarrow K^0 : t) - P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0 : t)}{P(\bar{K}^0 \rightarrow K^0 : t) + P(K^0 \rightarrow \bar{K}^0 : t)} = (6.6 \pm 1.3 \pm 1.0) \times 10^{-3} \quad (10.25)$$

の非対称が見られ、これが時間反転の破れの検証となった^{*2}。

10.7 中性子、原子による T 変換の検証

中性子や原子による T 変換の検証は、中性子や原子が**電気双極子能率** (electric dipole moment; EDM) をもつかどうかの実験をすることによって達成される。中性子は、磁気双極子能率をもっていることはよく知られている事実である。しかし、電気双極子能率をもっているかどうかはわかっていない。

電気双極子能率があるとは、電荷がある方向に正と負に分極している状態をいう。したがって、電気双極子のモーメントは

*2 生成されたものが K^0 か \bar{K}^0 であるかは、 pp 衝突反応

$$p + p \rightarrow K^- + \pi^+ + K^0 + \cdots, \quad K^+ + \pi^- + \bar{K}^0 + \cdots \quad (10.26)$$

で生成されるとき荷電 K 粒子、および次の K^0 と \bar{K}^0 の崩壊モードからわかる。

$$K^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e, \quad \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (10.27)$$

§10.7 中性子, 原子による T 変換の検証

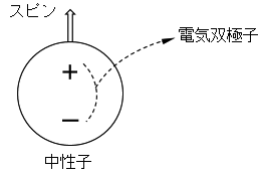


図 10.9: 中性子の電気双極子能率 スピン方向に偏極

電荷×距離 で表され, その単位は $[e \cdot \text{cm}]$ である。また, 中性子に方向性があるとすればスピンの方向しか考えられない。そこで, 電気双極子能率 P はスピンの方向に偏極していると考えられる。これを図示したのが図 10.9 である。

電気双極子能率と T 変換の関係を考えてみる。中性子のスピンの方向を基準にとる。スピン角運動量は,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (10.28)$$

の形をしているから, $t \rightarrow -t$ とすると, S は $-S$ となって -1 の固有値をもつ。

まず, 中性子に電気双極子がないとしたときのスピンの状態を図示したのが図 10.10 である。時間反転ではスピンは対称である。図中の (a) は右回りに回転し, したがって, スピンは右ねじの進む方向 (図では上方向) を向いている。 T 変換をして t を $-t$ に変えようと, 式 (10.28) よりスピンの向き (図では下方) になるが, 相変わらず右ねじの進む方向であり, 図の (b) になっている。これは図の (a) の「回転」を逆にしたことになる。ところが図の (b) は下方向きのスピンを上向きになるように全体を回転すると図の (c) になり, これはもとの図の (a) と同じものになる。よって, T 変換で

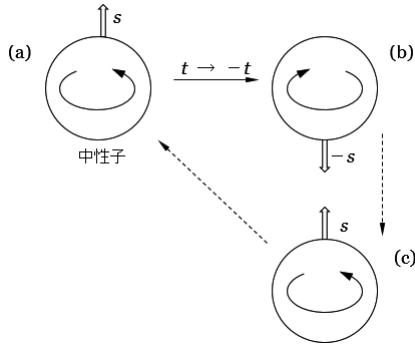


図 10.10: 中性子に電気双極子がなければ T 変換に対して対称

は対称である。

ところが、電気双極子があると図 10.11 に示すように、時間反転をしても電荷の正・負は時間に無関係なので、電気双極子はそのままだけが下向きとなり、時間反転に対しては非対称になる。

これを詳しく述べる。図 10.11 に示すように、中性子の電荷状態が図の上方に正、下方に負の電気双極子となっていた場合を考える。図の (a) に示すように、電気双極子能率 P がスピンの上向きと同じ向きにあるとする。この状態に T 変換を施すと、前に示したように、スピンだけ下向きの状態である図の (b) になり、 P があるので、これは明らかにもとの図の (a) とは異なった状態である。スピンの状態を図の (a) と同じ図になるようにすると図の (c) になり今度は電気双極子能率が逆向きになって図の (a) とは異なる。

このように、中性子に電気双極子能率 EDM があると時間反転は非対称なものになる。すなわち、中性子に電気双極子能率 EDM が

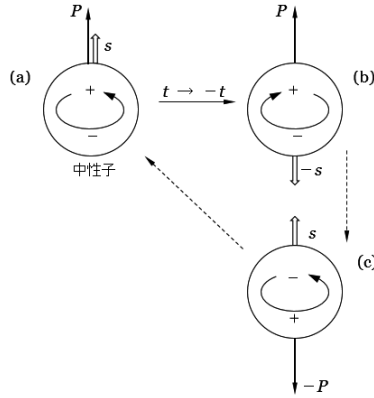


図 10.11: 中性子に電気双極子があると T 変換に対しては非対称になる。

あれば T 変換は破れていることになる。

現在の上限値は $\sim 10^{-25} e \cdot \text{cm}$ であり, 実験はたいそう難しい。**標準理論**の予言値である $\sim 10^{-30} e \cdot \text{cm}$ には程遠い状況である。標準理論を超えた理論である**超対称性理論**では, 中性子の電気双極子能率 EDM は $10^{-26} e \cdot \text{cm}$ から $10^{-28} e \cdot \text{cm}$ の範囲にあり, もう少しでその存在が見えるという予言もある。

談話 4 : パリティの固有値

静止した核子の角運動量は, スピン角運動量だけであるので, \hbar を単位にして $1/2$ (以下同様) である。放出される π 中間子の軌道角運動量 l は, 角運動量の保存則から制限され, 放出後の全角運動量 $l + \frac{1}{2}$ が放出前の角運動量 $\frac{1}{2}$ に等しいためには, 角運動量の

第 10 章 C, P, T 変換の対称性

合成則から $l = 0$ か $l = 1$ であり、実験により $l = 1$ であることがわかった。軌道角運動量 l の π 中間子のパリティは、 $P = (-1)^l$ の固有状態であることが示される。もし、 π 中間子固有のパリティが $P_\pi = -1$ であるとするならば、 π 中間子の軌道角運動量 l のパリティは、固有のパリティ P_π と軌道運動による $(-1)^l$ の積 $(-1)^{l+1}$ になる。

静止核子の固有パリティを P_N とし、空間反転に対する不変性が成り立っていれば、核子が π 中間子を放出する前後の系のパリティは、パリティの保存から変化しない。よって

$$P_N = P_N P_\pi (-1)^l \quad (10.29)$$

である。 $P_\pi = -1$ としたので、上式より放出される π 中間子の角運動量 l は $l = 1$ のみで $l = 0$ の場合はない。したがって、 $l = 1$ ということは $P_N = P_N P_\pi (-1)^l$ の式において

$$1 = P_\pi \times (-1)^1 \quad (10.30)$$

より $P_\pi = -1$ となって、初めの仮定が正しかったことを示している。

第 11 章

クォーク 仮想から実在へ

物質を細分化していくと、現状では、最も微小な物質の一つであるクォークにたどりつく。陽子、中性子や湯川の予言したパイ中間子などの粒子は、クォークの複合粒子である。チャームクォークといわれるものに例をとり、現実の粒子がクォークによってどのように組み立てられていくかを見てみよう。

11.1 坂田モデル

1940 年代後半、宇宙線の中に異常に長生きをする粒子が数多く見つかり、これが奇妙な粒子、あるいはストレンジ粒子といわれるものであった。さらに、1960 年代には加速器が発達し、測定器である泡箱の実用化と相まって発見された粒子が多数あり、これらは現在では強い相互作用をするハドロン（強粒子）といわれるものであり、ハドロンの数はおびただしいものとなった。それに伴い、ハドロンをより基本的粒子の複合粒子とみる考え方に進んできた。

その先鞭を切ったのが**坂田モデル**である。1958 年に**坂田昌一**によって提唱されたこのモデルでは、すべてのハドロンはそれがもっているスピン、**アイソスピン（荷電スピン）**、**ストレンジネス（奇妙さ）**によって分類され、基本粒子の複合体であるとした。最小の基本粒子として、陽子 p 、中性子 n 、ラムダ粒子 Λ の 3 つを考えた。

同一粒子の荷電だけが違う粒子を表すアイソスピン I の第 3 成分 I_z を横軸に、ストレンジネス S を縦軸にとった平面では、3 つの基本粒子は逆三角形になり、反粒子を表す $(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda})$ は三角形になる。

粒子の集まりを表すときには群論を使うと便利である。群論では、3 つの要素があるので「3 次元表現」といい $\mathbf{3}$ と表す。反粒子は $\bar{\mathbf{3}}$ と表す。中間子はバリオン（重粒子）数が 0 なので、バリオンと反バリオンの結合状態と考えられる。バリオンと反バリオンのスピンの互いに逆方向を向いているときには、スピン 0 の中間子を表し、同方向のときにはスピンの 1 の中間子を表すことができる。バリオンと反バリオンが互いに軌道角運動量をもつことによって、他のスピンをもつ中間子を表すことができる。ここで、ストレンジネス S の代わりに**ハイパー電荷**（超電荷） Y を導入する。**バリオン数**を B として、粒子の電荷 Q とアイソスピンの関係は、**ゲルマン・西島の式**

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \equiv I_3 + \frac{Y}{2} \quad (11.1)$$

で表され、 Y がハイパーチャージである。この式は 1953 年に**中野薫夫**、**西島和彦**および**ゲルマン** (M. Gell-Mann) により導かれた。群論的には、 $\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ の直積は $\mathbf{8}$ と $\mathbf{1}$ の直和になり $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ と書き表される。横軸に I_3 、縦軸に Y をとると、図 11.1 のように六角形と真ん中 $(0, 0)$ に 2 つで $\mathbf{8}$ 、さらに $(0, 0)$ に 1 つで $\mathbf{1}$ の表現となる。

このように、3 つの要素から**特殊ユニタリー群** (Special Unitary group; $SU(3)$) を作ることができる。 $SU(3)$ は行列で表される群で、3 つの要素を入れ換えても不変である。行列を U とし、 U の

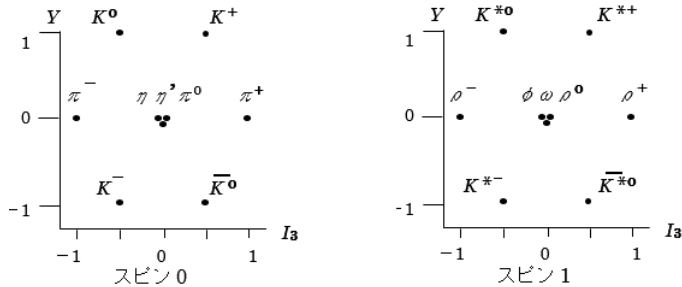


図 11.1: 坂田モデルによる中間子。各図で中心は同一点であるが、3種の異なる粒子に対応することから3点にずらした。

転置行列（行と列を交換した行列）をとり複素共役にしたものを U^\dagger と表すと、ユニタリーの意味は $UU^\dagger = 1$ であり、「特殊」は $\det U = 1$ の意味である。また、既約表現（ある次元でこれ以上簡単にできない表現）の直積（記号 \otimes ）は、**既約表現**の直和（記号 \oplus ）で表すことができる。さらに、坂田モデルはこの既約表現に個々の粒子を当てはめることができるものであった。

しかし、バリオンについては、実在する粒子を基本粒子にとったために、バリオンの規則性を十分説明することができなかった。けれども、基本粒子の従う数学的な枠組みは、その後に登場するクォークの出現以前にすでに存在していたことになる。

11.2 クォークモデル

§11.2.1 クォークモデルの考え方

1964 年にゲルマンとツバイク (G. Zweig) は, (p, n, Λ) のような現実に実在するものではなく, 仮想的粒子を基本粒子に導入した。「ハドロンは, 重粒子数が $1/3$ で電荷が $2e/3$ か, $-e/3$ のはんばな電荷をもった 3 種類の『素』粒子とその反粒子からなりたっている」と提案したのが始まりである。ゲルマンはそれらの素粒子をクォーク (quark) と命名した。これはジェームズ・ジョイス (James Joyce) の難解な小説『フィンネガンの徹夜祭』(Finnegans Wake) に出てくる three quarks にちなんでいる。クォークとは海鳥の鳴き声のことである。現実的にはできるだけその言葉のもつ意味にとらわれず, 先入観にとらわれることのないように, 無意味な言葉で表現したのがクォークである。

ファインマンは, ハドロンを構成している基本粒子をパートンと呼んだが, 現在では, パートンとはクォーク q , 反クォーク \bar{q} , 媒介粒子グルーオン g のことである。

SU(3) 群には, 同時に対角化できる演算子 (それぞれ固有値が定義できる) を表す行列が 2 つあり, それはすでに記述したアイソスピンの第 3 成分 I_3 とハイパーチャージ Y であり (I_3, Y) と表す。3 個の基本粒子であるクォークは,

$$u \left(+\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \quad d \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \quad s \left(0, -\frac{2}{3} \right) \quad (11.2)$$

で, バリオン数として $B = \frac{1}{3}$ とした。ここで, クォークの種類を q_i と表す。 I_3 や Y のようにクォークの種類を識別する量子数を

フレーバー (flavor; 香り) という。**反クォーク粒子**は \bar{q}_i と表し、クォークとは逆符号の量子数をもつので、**中間子**は $q_i \bar{q}_j$ (バリオン数は $1/3 - 1/3 = 0$)、**バリオン**は $q_i q_j q_k$ (バリオン数は $1/3 \times 3 = 1$) と表すことができる。

メソン (中間子) は坂田モデルで表したように

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (11.3)$$

で表現できる。バリオンは

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (11.4)$$

と表現できる。これを図示したものが図 11.2 である。このようなクォークモデルの初期において、ゲルマンが仏教の八正道にちなんだ**八道説**を提唱し、現在のバリオン **8 重項**がそれにあたる。

§11.2.2 群

クォークモデルの基礎になっている群を簡潔に振り返ってみよう。

11.2.2.1 回転群

角運動量、スピン、アイソスピンなどは系の回転が基本になっているので**回転群**を考える。

ある系の回転で、いく通りもの回転が考えられるが、これらの回転を集めたもの(集合)は**群**をつくる。ある1つの回転 R_1 は、群の要素になる。回転 R_1 と R_2 を続けて行うとき、積 $R = R_1 R_2$ も要

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

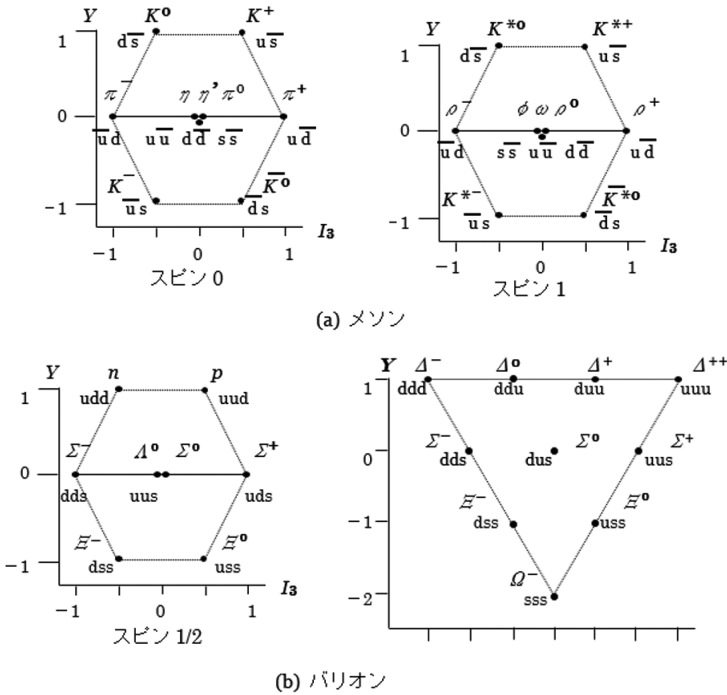


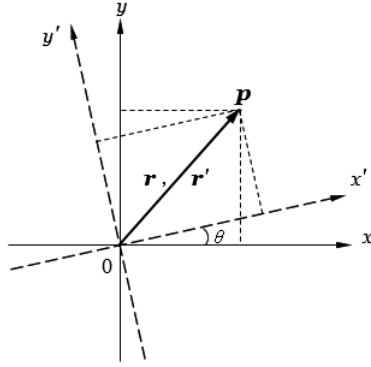
図 11.2: クォークモデルによる中間子と重粒子

素になる。何も回転しないこと、これを**恒等回転**といい、**単位元**が存在する。このような回転群は、**Lie 群**といわれる連続群に属する。

角度 θ の回転は、恒等回転に十分近い無限小回転の積で表現できる。これは次のような根拠から理解できる。

古典的には、角運動量 L は原点 O の周りの回転で表し

$$r(x, y, z), \quad p(p_x, p_y, p_z) = mv \quad (11.5)$$


 図 11.3: 座標系 (x, y, z) とその回転座標系

から

$$L \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (11.6)$$

で定義し、これを「角運動量」と呼んだ。量子力学では運動量 \mathbf{p} は演算子（オペレーター）で

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = -i\hbar \nabla \quad (11.7)$$

であった。したがって、 L もオペレーターである。ではどのようなオペレーターであろうか。

座標系を z 軸のまわりに θ だけ回転すると、任意の点 P は、元の座標系と回転座標系（ダッシュ系）の 2 重の座標 $\mathbf{r}(x, y, z)$ と $\mathbf{r}'(x', y', z')$ をもつ。この状態を図 11.3 に示す。

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

2 つの座標の間には

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

が成り立っている。微小回転 $\Delta\theta$ に対しては

$$\cos \Delta\theta \approx 1, \quad (11.8)$$

$$\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta \quad (11.9)$$

であるので

$$x' = x + y\Delta\theta \quad (11.10)$$

$$y' = -x\Delta\theta + y \quad (11.11)$$

$$z' = z \quad (11.12)$$

である。

もとの座標系での波動関数を $\psi(x, y, z)$, **回転座標系**では別の関数値 $\psi'(x, y, z)$ になるが, 新しい座標値を代入した**波動関数** $\psi(x', y', z')$ は, もとの波動関数に等しく

$$\psi'(x', y', z') = \psi(x, y, z) \quad (11.13)$$

である。したがって, 逆変換

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad (11.14)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad (11.15)$$

$$z = z' \quad (11.16)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 \psi'(x', y', z') &= \psi(x, y, z) \\
 &= \psi(x' - y'\Delta\theta, y' + x'\Delta\theta, z') \\
 &= \psi(x', y', z') - \Delta\theta \cdot y' \frac{\partial\psi(x', y', z')}{\partial x} \\
 &\quad + \Delta\theta \cdot x' \frac{\partial\psi(x', y', z')}{\partial y}
 \end{aligned}$$

であり、回転後の座標 (x', y', z') をあらためて (x, y, z) と表すと

$$\begin{aligned}
 \psi'(x, y, z) &= \psi(x, y, z) - \Delta\theta \cdot y \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x} + \Delta\theta \cdot x \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial y} \\
 &= \psi(x, y, z) - \frac{\Delta\theta}{i\hbar} \left\{ x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) - y \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} \psi(x, y, z)
 \end{aligned}$$

となる。また $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ より $L_z = xp_y - yp_x$ であり、量子力学では

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (11.17)$$

$$p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad (11.18)$$

であるから、座標軸を $\Delta\theta$ だけ回転したときには

$$\begin{aligned}
 \psi'(x, y, z) &= \psi(x, y, z) + i \frac{\Delta\theta}{\hbar} L_z \psi(x, y, z) \\
 &= \left(1 + i \frac{\Delta\theta}{\hbar} L_z \right) \psi(x, y, z)
 \end{aligned}$$

と表すことができる。すなわち、この回転のオペレーターは

$$\left(1 + i \frac{\Delta\theta}{\hbar} L_z \right) \quad (11.19)$$

になる。

以上の記述は、座標軸を $\Delta\theta$ だけ回転し、物理系を固定した場合（受動的立場）であったが、座標軸を固定し、物理系を $-\Delta\theta$ 回転する場合（能動的立場）でも同等である。今後は、物理系を回転する立場をとるものとする。さらに、添え字 x, y, z の代わりに $1, 2, 3$ を使う。

3 軸のまわりの**無限小回転**（角度 $\epsilon = \Delta\theta$ だけ物理系を回転）する操作を $R(\epsilon)$ とする。オペレーターは

$$R(\epsilon) = 1 - i\frac{\epsilon}{\hbar}L_3 \quad (11.20)$$

であり、有限角 θ の回転は、無限小回転を n 回繰り返し、

$$R(\theta) = \left(R(\epsilon)\right)^n = \left(1 - i\frac{\theta}{n\hbar}L_3\right)^n \quad (11.21)$$

である。ここで $n \rightarrow \infty$ では

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - i\frac{\theta}{n\hbar}L_3\right)^n = e^{-i\theta L_3/\hbar} \quad (11.22)$$

になる。すなわち物理系を第 3 軸 (z 軸) の周りに θ だけ回転させるオペレーターは

$$e^{-i\theta L_3/\hbar} \quad (11.23)$$

である。

11.2.2.2 ユニタリー群

ある系の状態を $|\phi\rangle$ とし、これが回転 U によって

$$|\phi\rangle \rightarrow |\phi'\rangle = U|\phi\rangle \quad (11.24)$$

になったとする。ある実験をして状態 $|\phi\rangle$ を見出す確率が、実験室の向きによって変わったりすることがないので、 $|\phi\rangle$ (ケットベクトル) の複素共役な状態を $\langle\phi|$ (ブラベクトル), U の複素共役をとりさらに転置行列をとったものを U^\dagger として、

$$|\langle\phi|\phi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\phi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\phi\rangle|^2 \quad (11.25)$$

が成り立つものとするれば

$$U^\dagger U = 1 \quad (11.26)$$

となり U は、**ユニタリー演算子**となる。

ここから自然単位系を用いて \hbar を省略して表す。 ϵ が小さいときに、 U を

$$U = 1 - i\epsilon L_3 \quad (11.27)$$

と表すと

$$U^\dagger U = (1 + i\epsilon L_3^\dagger)(1 - i\epsilon L_3) = 1 + i\epsilon(L_3^\dagger - L_3) + O(\epsilon^2) \quad (11.28)$$

となり、 $O(\epsilon^2)$ は ϵ^2 のオーダーのことで、ここでは省略可能である。よって $U^\dagger U = 1$ であるためには

$$L_3^\dagger = L_3 \quad (11.29)$$

であり, このことを L_3 は**エルミット量**であるという。 L_3 のことを第 3 軸の周りの回転の**生成演算子**という。

同様にエルミット演算子 L_1, L_2 を次式で定義する。

$$[L_j, L_k] = i\epsilon_{jkl}L_l \quad (11.30)$$

ϵ_{jkl} を群の**構造定数**といい, 交換関係が決まれば群の構造が決まる。このような L_1, L_2, L_3 は Lie 代数をつくる。

j, k, l が 1, 2, 3 の順なら $\epsilon_{jkl} = 1$

j, k, l が 3, 2, 1 の順なら $\epsilon_{jkl} = -1$

どれか 2 つが等しいなら $\epsilon_{jkl} = 0$

である。すべての生成演算子と交換可能な生成演算子の非線形結合演算子のことを**カシミール演算子** (Casimir operator) という。回転群では唯一

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (11.31)$$

がそれである。

群の 1 つの表し方として $n \times n$ 行の行列で表したとき, これを $n \times n$ 行列表現という。 A を正則^{*1}な $n \times n$ 複素数行列とすると, A の全体は群を作る。その中で

$$A^\dagger A = 1 \quad (11.32)$$

を満たす**ユニタリー行列**の全体は群を作り, **ユニタリー群** $U(n)$ と呼ばれる。

*1 逆行列をもつ行列, すなわち, その行列式の値が 0 でない行列。

A が実数行列の場合、その転置行列の A^T との間に

$$A^T A = 1 \quad (11.33)$$

を満たすときはやはり A 全体は群を作り、**直交群** $O(n)$ といわれる。さらに、

$$\det A = 1 \quad (11.34)$$

のときには「特殊」が付いた $SU(n)$, $SO(n)$ になる。これらの群は、応用面で物理学上特に重要である。

§11.2.3 中間子族

メソンは、クォークと反クォークの結合状態として $(q\bar{q})$ で表される。 $SU(3)$ では

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (11.35)$$

であり、3 種類のクォークと反クォークを、アイソスピンの第 3 成分とハイパーチャージによる平面に描くと、図 11.4(a),(b) に示すような逆三角形と三角形になる。中間子は $(q\bar{q})$ であるから、クォーク逆三角形の各頂点に反クォーク三角形の重心の位置を重ねる。図 11.4(c) に示す。

たとえば、反クォーク三角形の重心が、クォーク逆三角形の d クォークの場所にある場合を考えると、反クォーク三角形上の頂点 \bar{s} は、 d クォークと一緒にあって $d\bar{s}$ となり、反クォーク三角形の左下の頂点 \bar{u} と d クォークと結合して $d\bar{u}$ 、右下の頂点 \bar{d} は d クォークと結合して $d\bar{d}$ となる。以下、同様である。

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

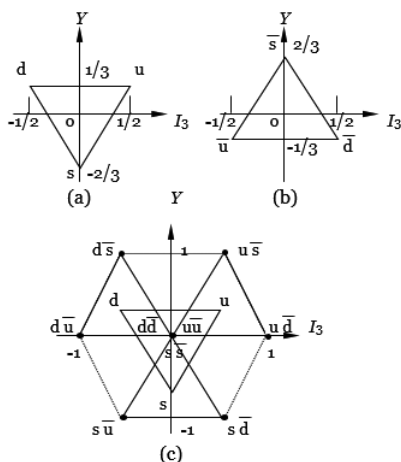


図 11.4: (I_3, Y) 平面での (a) クォーク, (b) 反クォーク, (c) クォーク・反クォーク (中間子)

これらの結合状態は、現実の中間子のどれに対応しているかを表したものを次に示す。1 つの合成粒子に 2 つ以上の成分粒子の組み合わせがあるときには、**クレブシュ・ゴルダン (Clebsch-Gordan) 係数** (後述) を使って合成するときの係数を定める (§13.6.2 および §14.3 節参照)。

11.2.3.1 桜井の考察

桜井純 (J. J. Sakurai) は、中性 8 重項と 1 重項は混じり合うことを考えた。一般に、8 重項と 1 重項に含まれる $I = Y = 0$ の状態は、 $SU(3)$ の 8 重項または 1 重項という多重項以外には、量子数は同じであるから混合が起こる。

表 11.1: 中間子 (メソン)

	(a) 擬スカラーメソン # $J^P = 0^-$	(b) ベクトルメソン $J^P = 1^-$
8 重項	$\pi^+ \quad u\bar{d}$	$\rho^+ \quad u\bar{d}$
	$\pi^0 \quad (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\rho^0 \quad (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
	$\pi^- \quad d\bar{u}$	$\rho^- \quad d\bar{u}$
	$K^+ \quad u\bar{s}$	$K^{*+} \quad u\bar{s}$
	$K^0 \quad d\bar{s}$	$K^{*0} \quad d\bar{s}$
	$\bar{K}^0 \quad s\bar{d}$	$\bar{K}^{*0} \quad s\bar{d}$
	$K^- \quad s\bar{u}$	$K^{*-} \quad s\bar{u}$
	$\eta^0 \quad (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$\phi \quad s\bar{s}$
		本来は $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$
1 重項	$\eta'^0 \quad (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	$\omega \quad (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$
		本来は $(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$

擬スカラーメソン (pseudoscalar meson) J^P
 J はスピン, P はパリティを表す。

本来, 中性 8 重項は

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \quad (11.36)$$

1 重項は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (11.37)$$

であるが、これが現実を観測されるときには

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \cos \lambda |\omega_0\rangle + \sin \lambda |\phi_0\rangle \\ |\phi\rangle &= -\sin \lambda |\omega_0\rangle + \cos \lambda |\phi_0\rangle \end{aligned}$$

となる。 λ を混合角といい $\sin \lambda = 1/\sqrt{3}$ であり、度で表すと

$$\lambda \approx 35.26^\circ \quad (11.38)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\omega_0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} + d\bar{d}\rangle \\ |\phi\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |\omega_0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\phi_0\rangle = -|s\bar{s}\rangle \end{aligned} \quad (11.39)$$

であり、現実の粒子は $\phi \approx s\bar{s}$ となって、これはストレンジ中間子となり、 $\omega \approx (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$ は非ストレンジ中間子となる。

§11.2.4 重粒子族

バリオンは 3 つのクォークの結合状態 (qqq) である ($q = u, d, s$)。SU(3) から (11.4) で示したように

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (11.40)$$

であったから、図 11.5 のようになる。

このことは次のように考える。まず (qq) 系を考えると、中間子のときと同じようにしてクォークの逆三角形を重ね合わせて考えら

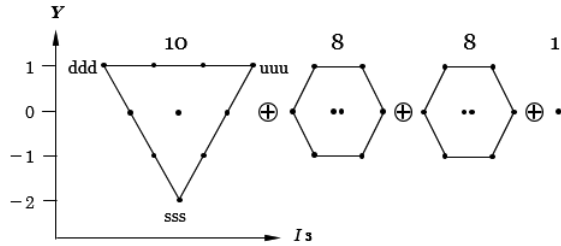


図 11.5: バリオンの多重項

れる。クォークの逆三角形の各頂点に他のクォークの逆三角形の重心を配置する。すると、各辺が2倍になった逆三角形ができる。これが

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (11.41)$$

であり図 11.6 に示す。

次に、クォークの逆三角形と上にできた 6 の逆三角形および $\bar{3}$ の三角形を組み合わせると

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 \quad (11.42)$$

ができたことになるので、まず $6 \otimes 3$ から始める。 $6 \otimes 3$ は図 11.7 に示す。この図に示すように

$$6 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \quad (11.43)$$

になる。

次に $\bar{3} \otimes 3$ は、中間子の場合と同じで図 11.8 に示す。

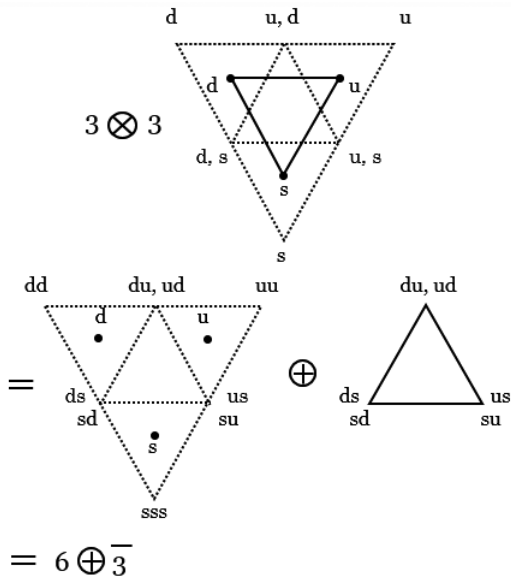


図 11.6: 直積 $3 \otimes 3$ は、直和 $6 \oplus \bar{3}$ に等しい。

重粒子 **10 重項**を現実の粒子に当てはめたものが図 11.9 であり、
重粒子 **8 重項**は図 11.10 である。

よって

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (11.44)$$

となるので、その結果は表 11.2 の通りである。10 重項は、クォークの入れ換えに対して完全対称であり、1 重項は完全反対称である。

このように、はじめは仮想粒子として導入したクォークが、実在粒子を形作る重要な基本粒子になった。

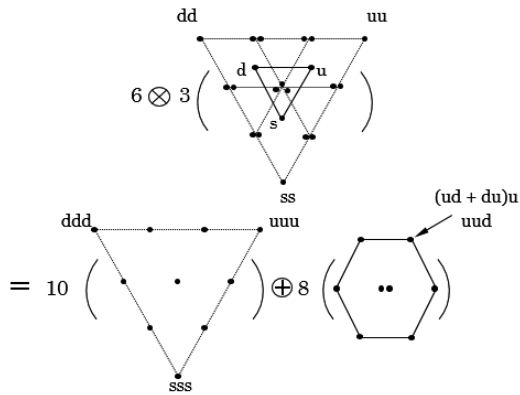


図 11.7: 直積 $6 \otimes 3$ は、直和 $10 \oplus 8$ に等しい。

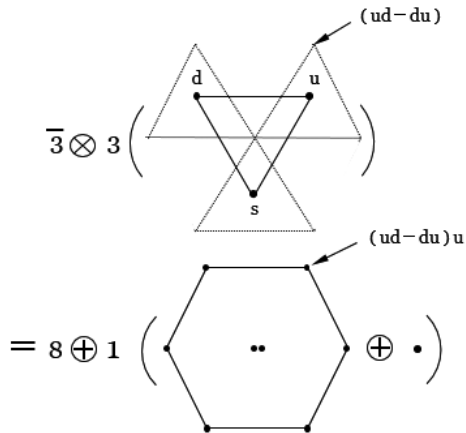


図 11.8: 直積 $\bar{3} \otimes 3$ は、直和 $8 \oplus 1$ に等しい。

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

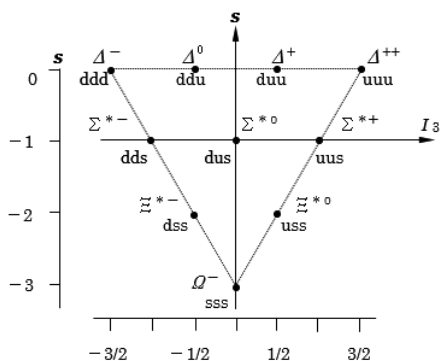


図 11.9: 10 重項と実在の粒子

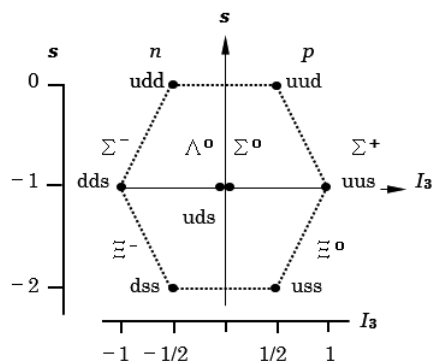


図 11.10: 8 重項と実在の粒子

表 11.2: 重粒子 (バリオン)

8 重項	p	uud
	n	udd
	Λ	$(ud - du)s/\sqrt{2}$
	Σ^+	uus
	Σ^0	$(ud + du)s/\sqrt{2}$
	Σ^-	dds
	Ξ^0	uss
	Ξ^-	dss
10 重項	Δ^{++}	uuu
	Δ^+	$(uud + udu + duu)/\sqrt{3}$
	Δ^0	$(udd + dud + ddu)/\sqrt{3}$
	Δ^-	ddd
	Σ^{*+}	$(uus + usu + suu)/\sqrt{3}$
	Σ^{*0}	$(uds + usd + dsu + dus + sud + sdu)/\sqrt{6}$
	Σ^{*-}	$(dds + dsd + sdd)/\sqrt{3}$
	Ξ^{*0}	$(uss + sus + ssu)/\sqrt{3}$
	Ξ^{*-}	$(dss + sds + ssd)/\sqrt{3}$
	Ω^-	sss
1 重項	$\Lambda^*(1405)$	$(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu)/\sqrt{6}$

11.3 カラー (color) の SU(3)

§11.3.1 カラー荷

同じクォークでもカラーの違いがあることは前に記した。たとえば $\Delta^{++} = (uuu)$ は、 u クォークのスピンの $1/2$ のフェルミオンなので、 Δ^{++} のスピンの $3/2$ の粒子を作るためには、クォーク 3 個ともスピンの同じ向き ($u \uparrow u \uparrow u \uparrow$) でなければならない。フェルミオンが同一状態に 3 個も入ることになってパウリの排他律に反するから、何かほかの自由度がなければならない。この自由度をクォークの**カラー** (color; 色) の違いという。

カラーという言葉の発明者は**ゲルマン**である。クォークには赤 (Red; R)、緑 (Green; G)、青 (Blue; B) の自由度があったとした。カラーの違いがあるといっても実際に色がついているわけではなく、状態の違いを便宜上カラーの違いという。したがって、3 種類の u クォーク u_R, u_G, u_B や 3 種類の d クォーク d_R, d_G, d_B などの違いを表す。クォークは電荷と同じように 3 種類のカラー荷をもつという。強い相互作用では、カラー荷を交換する。

クォークのカラーに対して、クォークには u, d, s などの種類の違いがあることを、南部陽一郎は、クォークには 3 つの**香り** (flavor) があると名づけた。

1964 年に**南部陽一郎**、**韓茂栄**、**宮本米二**は、クォークの相互作用は、 (u, d, s) の香りの SU(3) 変換ではほぼ不変で、カラーの SU(3) では正確に不変であることを主張した。

§11.3 カラー (color) の SU(3)

カラーの SU(3) を $SU(3)_C$ と表すと、クォークの相互作用は $SU(3)_C \times SU(3)_C$ で表される。また、南部は、クォークを結びつけるものを**グルーオン** (gluon; 膠着子) と名づけた。したがって、グルーオンもまた色付きになり、これは $SU(3)_C$ での 8 重項になる。

(R, G, B) をもつクォークは $SU(3)_C$ での **3 重項 3_C** であり、 $(\bar{R}, \bar{G}, \bar{B})$ の反クォークも反 3 重項 $\bar{3}_C$ である。

中間子 ($q\bar{q}$) は

$$3_C \times \bar{3}_C = 8_C \oplus 1_C \quad (11.45)$$

であり、重粒子 (qqq) は

$$3_C \times 3_C \times 3_C = 10_C \oplus 8_C \oplus 8_C \oplus 1_C \quad (11.46)$$

であって、中間子のときと同様にして

$$u \rightarrow R, \quad d \rightarrow G, \quad s \rightarrow B \quad (11.47)$$

などとすれば、8 重項は

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}) \quad (11.48)$$

となる。さらに、 $SU(3)_C$ 1 重項に属する

$$\frac{1}{3}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (11.49)$$

があるが、これは無色であるのでカラー荷の相互作用には関与しない。

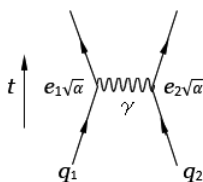


図 11.11: 量子電磁力学でのクォーク間の γ の交換。反応の強さは $e_1\sqrt{\alpha} \times e_2\sqrt{\alpha}$ になる。

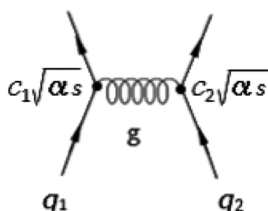


図 11.12: 量子色力学でのクォーク間の g の交換。反応の強さは $c_1\sqrt{\alpha_s} \times c_2\sqrt{\alpha_s}$ になる。

§11.3.2 相互作用の強さ

量子電磁力学 (QED) で、2 粒子の電荷を e_1, e_2 とすると、クォークとクォークの結合による電磁氣的相互作用の強さは、 $e_1 e_2 \alpha$ であった。ここで α は微細構造定数である。 e_1, e_2 は e を単位として $+2/3$ または $-1/3$ である。**ファインマン図**を図 11.11 に示す。

同様に、**量子色力学 (QCD)** で、2 つのカラー間に交換されるグルーオンの結合は、図 11.12 で示される。 α_s は強い相互作用の結合定数である。図のように、2 つのクォークの相互作用において、

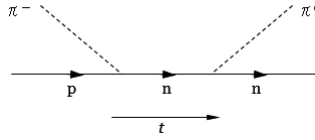


図 11.13: $\pi^- p \rightarrow n + \pi^0$ 反応

2 つのバーテックスでのカラー係数を c_1, c_2 とすると, 2 つのカラー荷間に交換されるグルーオンによる強い力の結合の大きさは $(c_1 c_2 \alpha_s)/2$ である。さらに,

$$C_F = \frac{1}{2} |c_1 c_2| \quad (11.50)$$

をカラー因子といい, 結合の強さを表している。

§11.3.3 カラーと強い相互作用

強い相互作用は, フレーバーといわれる 6 種類のクォーク (u, d, c, s, t, b) 間の相互作用である。強い相互作用ではクォークのフレーバーは変わらない。

(例) $\pi^- p \rightarrow n + \pi^0$ (強い相互作用)

この反応は, 一時代前には図 11.13 に示すように, ある点で陽子に π^- が吸われて中性子になり, 別の点で中性子が π^0 を放出する反応と見られていた。

別の例は, 反応 $\pi^- p \rightarrow n + \pi^0 + \pi^0$ であり, 現在では, 図 11.14 のように反応の過程でクォークが入れ代わるだけであるとみなされる。

図中でヘアピン形の u, \bar{u} が出て行くところは, エネルギーさえ

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

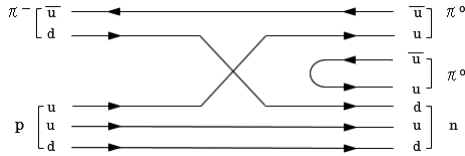


図 11.14: $\pi^- p \rightarrow n + \pi^0 + \pi^0$ 反応のクォーク線図

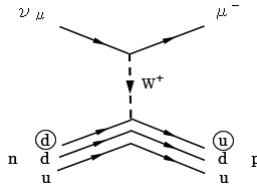


図 11.15: 弱い相互作用 $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ 反応図

十分であるなら、真空から u, \bar{u} 対が発生することを表している。このクォーク線図により、バリオン数や電荷などが保存することは当然の結果である。

弱い相互作用は、 W, Z ボソンの媒介によるもので、**フレーバー**が変化してもよい。たとえば、図 11.15 に示すように、弱い相互作用である

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \quad (11.51)$$

の反応を見ると円で囲った d クォークが W^+ ボソンとの相互作用により u クォークに変わる（フレーバーの変化）。

一般にクォーク間の相互作用は、クォークの赤、緑、青のカラー荷によって引き起こされ、カラーを媒介するものがグルーオンである。カラーを光の 3 原色で表すと図 11.16 になる。

§11.3 カラー (color) の SU(3)

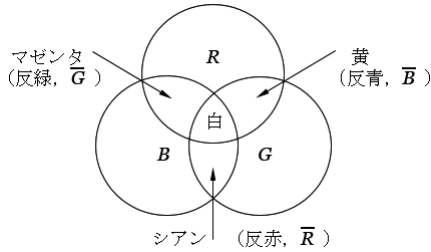


図 11.16: 光の三原色になぞらえたカラー図

実在する粒子に対する条件は、カラーは「白色」または無色である、ということである。白色にする方法として

- (1) 赤, 緑, 青を等量混ぜる
- (2) 黄, シアン, マゼンタを等量混ぜる
- (3) (R, G, B) とその補色を等量混ぜる

があげられる。バリオンの $qqq(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ 構造においては $RGB(\bar{R}\bar{G}\bar{B})$ であり、中間子の $q\bar{q}$ においては $R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$ が白色の条件である。

ここで $(RG), (RB), (GB), (\bar{R}\bar{G}), \dots$ は引力であり、これがバリオンの場合のように、さらに (RGB) となると引力はきわめて大きくなる。このように電荷の正・負が引き合うように、カラー荷によって、正である赤と負である反赤などの引力が説明できる。そのみならず、正の赤と青、赤と緑なども互いに引き合うことができる。すなわち、色がクォーク間の力の源である。このとき、色と色との間に媒介的に存在するグルーオンによりクォークが結び付けられてハドロンを形成する。

電荷は 1 種類であり、カラー荷は 3 種類である。電荷の媒介粒

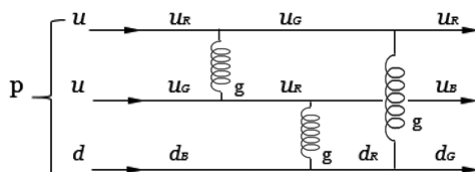


図 11.17: (u, u, d) からなる陽子は、各々のクォーク間でグルーオンを交換し、強く結びつけられている。

子は光子であり、これは中性の荷であって相互干渉はしないが、カラー荷の媒介粒子はグルーオンであり、これは色の荷をもっている。それゆえグルーオン同士が相互作用をすることができる。カラーの例としてバリオンとメソンを挙げておく。

バリオン: “RGB”, $p(uud) \rightarrow u_R u_G d_B, u_B u_G d_R, u_R u_B d_G, \dots$

メソン: “ $R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$ ”, $\pi^+(u\bar{d}) \rightarrow u_R \bar{d}_{\bar{R}}, u_G \bar{d}_{\bar{G}}, u_B \bar{d}_{\bar{B}}$

の状態が可能である。

このように白色または無色だけが現実の粒子に許される状態なので、カラー荷を直接検出することはできない。レプトン、光子、弱ボソンなどは白色と考える。グルーオンを媒介にしてハドロンを形成しているので、たとえば陽子は図 11.17 のようになる。クォーク間の力は、同種の色は反発し、補色では引力になる。

また、グルーオンはカラー荷をもつので、図 11.18 に示すように自己結合がある（これを **3-gluon coupling** という）。光子は電荷を運ばないのでこのようなことはない。場の量子が自分自身と相互作用をするような理論は、**非アーベル (non-Abelian) 理論**と呼ばれる。

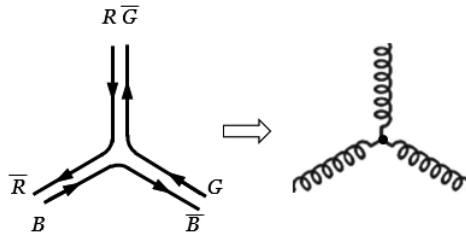


図 11.18: グルーオンの自己結合 (3 グルーオン結合)

§11.3.4 シールド効果

QCD (量子色力学) と **QED** (量子電磁力学) のシールド効果の違いについて記す。

(a)QED

短時間に

$$e^- \rightarrow e^- + \gamma$$

$$\gamma \rightleftharpoons e^- + e^+$$

の反応で、電子は e^- , e^+ の電荷の雲に囲まれている。図 11.19 に示されるように、 e^+ の方が e^- に引きつけられている。

図 11.20 のように観測用電荷を電子に近づけていくことを考える。観測用電荷は、電子をシールドしている e^+ の雲を通り抜けることになり、中心ほど大きな電荷を観測する。観測用電荷が感じる電荷と電子までの距離との関係を図示したものが図 11.21 である。

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

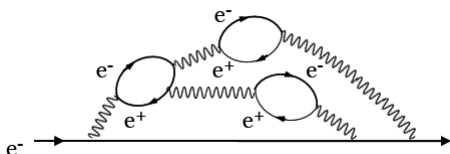


図 11.19: 電子は e^- , e^+ の雲に囲まれている。 e^+ の方が電子の近くにできる。

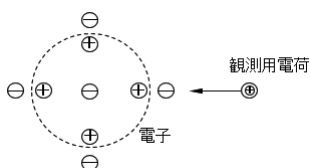


図 11.20: 観測用電荷を電子に近づけてゆく。

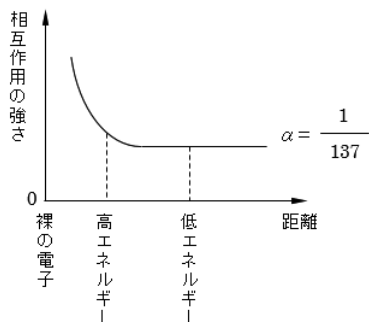


図 11.21: 観測用電荷が感じる電荷は、電子からの距離に依存し、遠方では $\alpha = 1/137$ である。

(b) カラー荷

(a) と同様な現象に 3-gluon coupling も加わる。すなわち、図 11.22 で表される。上図は赤クォークが 3 グルーオン結合や赤・反

赤の対生成を行なう様子を示す。

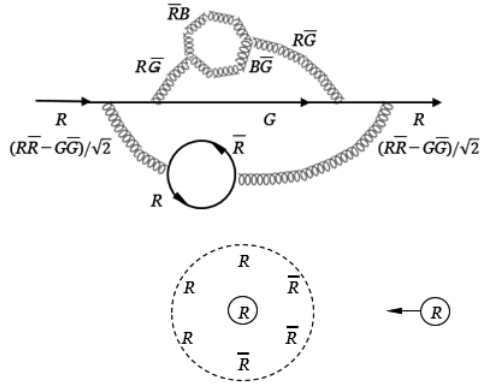


図 11.22: 赤クォークのシールド効果

観測用の赤を、たとえば赤クォークに近づけてみる。このときには、大半は赤の詰まったところを通過する。赤のそばには赤ができる確率が大い。中心に近づくとき赤カラーは減少してしまう。すなわち、観測用の赤の受ける力は減少する。これを**漸近的自由**といい、高エネルギーになればなるほど自由粒子のように振る舞い、QEDの場合とは逆である。

図 11.22 の下半分は観測用の赤クォークが赤クォークに近づくときの様子を示す。このとき赤クォークが感じる赤カラーは減少する。

(c) カラー因子

(i) 相互作用

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

8 つのグルーオンのうち、たとえば、 $B\bar{B}$ をもつものを交換するものを図 11.23 に示す。

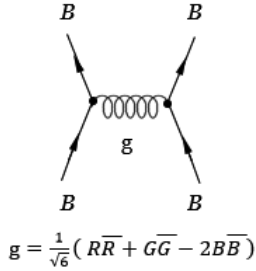


図 11.23: $B - B$ 相互作用

この図のカラー係数は

$$c_1 c_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{3} \quad (11.52)$$

であるから (11.50) によりカラー因子は

$$C_F = \frac{1}{3} \quad (11.53)$$

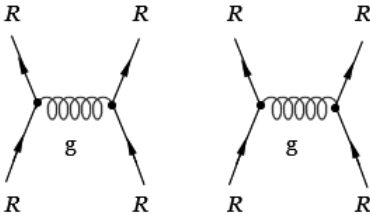
になる。

(ii) $R - R, G - G$ 相互作用

図 11.24 に 2 通りの異なるグルーオンによるダイヤグラムを示す。図の左側のカラー係数の計算は

$$c_1 c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{6} \quad (11.54)$$

§11.3 カラー (color) の SU(3)



$$g = \frac{1}{\sqrt{6}}(\overline{R}R + \overline{G}G - 2\overline{B}B) \quad g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{R}R - \overline{G}G)$$

図 11.24: $R - R$ 相互作用

であり、図の右側は

$$c_1 c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \quad (11.55)$$

である。よって 2 つで

$$c_1 c_2 = \left(\frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}, \quad \therefore C_F = \frac{1}{3} \quad (11.56)$$

となる。 $G - G$ に対しても同様である。

(iii) 異なるカラー

[例] $R - B$ をあげると図 11.25 に示すように、2 つの異なるグルーオンが交換できる。図の左のダイアグラムは

$$c_1 c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{1}{3} \quad (11.57)$$

右側は

$$c_1 c_2 = 1 \quad (11.58)$$

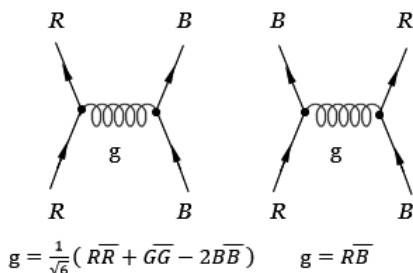


図 11.25: $R - B$ 相互作用

で、合計の計算のとき、これら二つの振幅は、加算か減算かということが問題になる。

これに対する答えは、クォークの交換に対するカラー波動関数の対称性による。クォークの交換に関するカラー波動関数が対称（反対称）に対しては、加算（減算）となるので

$$c_1 c_2 = +\frac{2}{3}, \left(-\frac{4}{3}\right) \quad (11.59)$$

である。これまでのところをまとめると、カラー係数については

$$c_1 c_2 = P - \frac{1}{3} \quad (11.60)$$

で、 P は 2 つのクォークのカラー対称状態

$$P = +1 \text{ (対称)}, \quad -1 \text{ (反対称)} \quad (11.61)$$

をとる。

(iv) $q\bar{q}$ 間のカラーの交換

メソン内での $q\bar{q}$ 対間でグルーオンの交換が起こる。すべてのカラーは同等の資格であるので、例を挙げる。

§11.3 カラー (color) の SU(3)

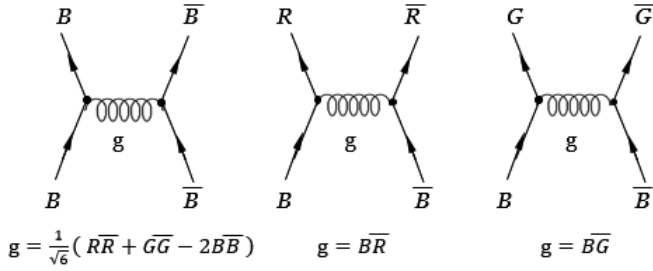


図 11.26: $B - \bar{B}$ 相互作用

[例] $B - \bar{B}$ を図 11.26 に示す。

一番左は

$$c_1 c_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2}{3} \quad (11.62)$$

であり、真ん中は

$$c_1 c_2 = (+1)(-1) = -1 \quad (11.63)$$

で、右端は

$$c_1 c_2 = -1 \quad (11.64)$$

である。反粒子のバーテックスには、カラー荷が逆なので逆符号をつける。これに、カラー 1 重項

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (11.65)$$

第 11 章 クォーク 仮想から実在へ

がすべてのカラーが同じ資格で現れるので、1 つのカラーに因子 $1/\sqrt{3}$ を掛けておく。 $q\bar{q}$ に対しては合計で

$$c_1 c_2 = 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{3} - 1 - 1 \right) = -\frac{8}{3} \quad (11.66)$$

となる。上式で最初の 3 は $R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$ を対等に含むことに起因する。 $q\bar{q}$ 相互作用に対する全カラー因子は

$$C_F = \frac{4}{3} \quad (11.67)$$

である。

(v) バリオン内の (qqq) の交換 に対しては

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) \quad (11.68)$$

を考慮すると、 \bar{q} は反対称だから $P = -1$ である。よって

$$C_F = \frac{2}{3} \quad (11.69)$$

である。

第 12 章

新世代のクォークと実験的検証

陽子、中性子、 π 中間子などは、クォーク組成を見てみると、 u クォーク、 d クォークからなっていることがわかっている。1940 年後半に宇宙線中に V 字型や折れ釘型をした不安定事象が多数見つかり、これらは s クォークを含むものであることがわかった。1974 年にチャームクォークの事象が予告なしに見つかり、ついでボトムクォーク、トップクォークが発見された。チャームクォーク以降の激動期について見てみよう。

また、新しいクォークは、どのようにして見つけることができるのだろうか。一般に、加速器を用いた実験で、発生する 2 次粒子のパターンから新粒子を決定するという方法をとるが、これは非常な困難さを伴う。加速器が電子・陽電子衝突型加速器のときは、電磁相互作用により、反応の断面積がクォークの電荷の 2 乗に比例することを用いれば、直ちに新クォークの発生を知ることができる。ここでは、その手法を見てみるとともに、その他の方法の概略も述べよう。

12.1 第 2 世代、第 3 世代のクォークの発見

現在、クォークはレプトンと並んで素粒子の最も基本的な粒子である。強い相互作用をするハドロンはクォークからできているが、

ハドロンを分類すると重粒子と中間子になり、両者はクォークの複合体であることを §11 クォークモデルで述べた。陽子と中性子からなる核子は、第 1 世代のクォーク (u, d) のみでできていて、クォーク組成で見ると、陽子は (u, u, d) であり、中性子は (u, d, d) である。第 2 世代の s クォークを含むものとして、ストレンジ粒子と呼ばれるものが、1940 年代後半から 1950 年代にかけて続々見つかった。 Λ 重粒子や K 中間子などのクォーク組成には、 s または \bar{s} クォークが含まれていることがわかった。

ところで、1974 年 11 月 11 日に素粒子物理学の記念すべき時が始まった。

§12.1.1 第 2 世代クォーク

1974 年 11 月 11 日、スタンフォードの会議の席上で、**バートン・リヒター** (Burton Richter) などが 11 月 9 日から 10 日の実験データの中に Ψ **メソン**があったことを発表した。それを聞いていた MIT の**サムエル・ティン** (Samuel C. C. Tin) が、過去の BNL の実験の中に、スタンフォードグループが発見した粒子とまったく同じ粒子を見つけていたことに思い当たり、直ちにティンのグループに電話を入れて J/Ψ **メソン**と命名した。

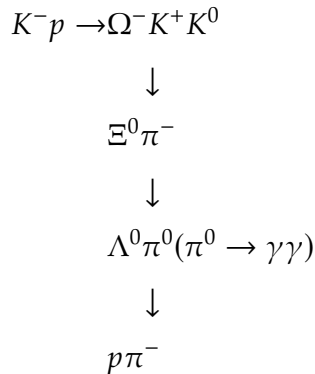
これがそれまでのフレーバーにつぐ、**チャーム粒子**に対する発見であり、電磁相互作用と弱い相互作用の統一への突破口ともなった発見が、不意に、何の前触れも無く、突然、 J/Ψ が世に現れたときの状況である。チャームは理論的にもあまり話題に上らない存在であったが、ある日、突然、劇的な登場をした。

J/Ψ は、理論的に存在が予想された粒子ではなかった。また、実

§12.1 第2世代, 第3世代のクォークの発見

験的な観点から質量の範囲なども予想されたものでもなかった。たまたま、偶然発見されたものであった。質量も極めて狭い幅だったので、検出器のセットアップ、エネルギー分解能などが、 J/Ψ の質量幅に合致するものだったということは非常な幸運であった。

物理学上の発見には、理論が先行することもある。たとえば、ゲルマンの**八道説**から発展したクォークモデルで予言された Ω^- の発見がある。 Ω^- は理論的に存在が予言され、1964 年に BNL の**サミオス** (N. Samios) たちの 80 インチ水素泡箱実験により発見された。 K^- ビームを水素泡箱に導き、次の反応で粒子を確認した。



K^0 以外のすべての粒子を同定し、予言された Ω^- の**ストレンジネス**が -3 であることを示した。

このように、理論と実験は、車の両輪のように、物理学の発展に寄与する。

12.1.1.1 背景（あるとすれば）

1960 年頃から**グラシヨウ** (S. Glashow) などによって電磁相互作用と弱い相互作用の統一の試みがなされ、1967 年**ワインバーグ** (S. Weinberg) と 1968 年**サラム** (A. Salam) によって完全なものになった。これが **GWS**（グラシヨウ、ワインバーグー、サラム）理論である。

一方、グラシヨウはレプトンとクォークが

$$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} ? \\ s \end{pmatrix}$$

のように、第 1 世代、第 2 世代と対応がつくとすべて理論的に説明するのに都合がよいと考えた。？の部分に第 4 のクォーク（これをチャームとした）があるとすれば、弱い相互作用のあらゆる面で完全にうまく説明できた。**チャームクォーク**の存在に関して、1973 年のグラシヨウ・イリオポロス・マイアニ (Glashow-Iliopoulos-Maiani) の **GIM 機構**があった。これは K_L^0 の崩壊である $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ などで、理論の予想より遥かに小さな確率でしか崩壊しないことを説明するのに、第 4 のクォークを導入した。これによる項が、それまでの項を打ち消しあい、崩壊を起こりにくくするというのがその内容である。クォークの**第 2 世代**を次のよ

うに表した。

$$Q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

ストレンジクォークと対を成すチャームクォークがあるとすれば、チャームクォークを含むハドロンが多数見つかってよいと思われたが、誰もそのようなものは見ていなかった。そこで、このクォークは非常に重くて実験にかからないかともいわれたが、GIM 機構からはあまり重すぎてもうまくないということであった。しかし、ほとんど人の目を引かなかった。

12.1.1.2 J/Ψ の発見

前に示したように、衝撃的なニュースがリヒターとティンなどによって 1974 年にもたらされた。SLAC (スタンフォード・リニア・アクセラレーター) の陽電子・電子衝突型加速器 SPEAR でのリヒター達の実験は

$$\begin{aligned} e^+ + e^- &\rightarrow e^+ + e^- \\ &\rightarrow \mu^+ + \mu^- \\ &\rightarrow \text{ハドロン} \end{aligned}$$

などの断面積で、 $E = 2E_e$ を変えていくと、質量が $3105 \text{ MeV}/c^2$ で、幅 Γ が 2 MeV の鋭いピークの共鳴状態を発見した。彼らはこれを Ψ と命名した。これは陽電子・電子が衝突してエネルギーの塊である光子になり、これが直ちに Ψ に変わって、それが崩壊したものを検出したものである。これを図 12.1 に示す。

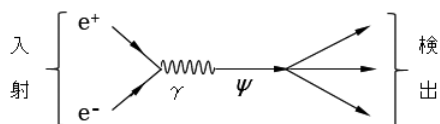


図 12.1: $e^+e^- \rightarrow (\gamma) \rightarrow \Psi \rightarrow$ 崩壊粒子の検出

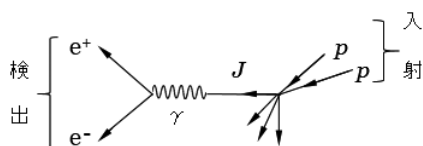


図 12.2: $p + \text{Be} \rightarrow J + \dots, J \rightarrow \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ を検出

また、ティン達が BNL の 30 GeV AGS（強収斂型陽子シンクロトロン）を使って、ビームエネルギーが 28.5 GeV の陽子をベリリウムターゲットに当て

$$p + \text{Be} \rightarrow e^+ + e^- + \dots \quad (12.2)$$

の反応で、陽電子と電子の出てくるものを調べ、新しいベクター中間子を探していた。不変質量 $M(e^+e^-)$ が 3.1 GeV に異常にデータが多かったが、当初は測定器の関係と思われていた。ところが、リヒター達が Ψ の存在をいうや否や、同じ粒子であることに気付き、これを J と名づけた。彼らはリヒター達の逆の反応を見ていたことになる（図 12.2）。これら一連の発見は、ノーベル賞に値した^{*1}。

*1 J. J. Aubert *et.al.*, Experimental Observation of a Heavy Particle J , Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974).

J.-E. Augustin *et. al.*, Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation, Phys. Rev. Lett. **33**, 1406 (1974).

§12.1 第2世代, 第3世代のクォークの発見

SLAC のデータで, 反応の断面積が

$$\sigma_{ee} = \sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$$

$$\sigma_{\mu\mu} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

$$\sigma_h = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン})$$

とすると, 共鳴状態の幅 Γ と反応の断面積との間には, **ブライト・ウィグナー (Breit-Wigner) の共鳴公式**により

$$\sigma_{ee}(E) \approx \frac{3\pi\hbar^2}{M_\Psi^2 c^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{ee}}{(E - E_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4}$$

$$\sigma_{\mu\mu}(E) \approx \frac{3\pi\hbar^2}{M_\Psi^2 c^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E - E_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4}$$

$$\sigma_h(E) \approx \frac{3\pi\hbar^2}{M_\Psi^2 c^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_h}{(E - E_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4}$$

の関係がある。実際の反応の**断面積**の実験データから

$$\Gamma_{ee} \approx \Gamma_{\mu\mu} \approx 5 \text{ keV}, \quad (12.3)$$

$$\Gamma_h \approx 60 \text{ keV}, \quad (12.4)$$

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_h \approx (67 \pm 12) \text{ keV} \quad (12.5)$$

であることがわかった。図 12.3 に**共鳴状態**を示す。寿命 τ は

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_{tot}} \approx 10^{-20} \text{ s} \quad (12.6)$$

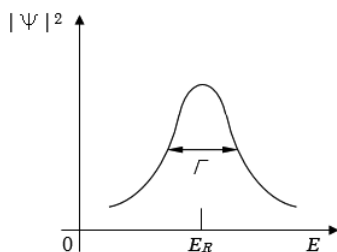


図 12.3: $E = E_R$, 幅 Γ の共鳴状態

であり, これは Λ や ρ 粒子の 10^{-23} s に比べると, 質量が極端に重いにもかかわらず極めて長い。これは何故であろうか。その答えは §12.1.2 に示そう。

J/Ψ の発見から 10 日ほど後に, SLAC で質量が $3684 \text{ MeV}/c^2$ の Ψ' , それから 1 年ほどの間にチャームと反チャームクォークの結合状態のチャーモニウムの細部がわかった。

12.1.1.3 なぜチャームであるか

J/Ψ が壊れにくいことは, 何か保存則が関係しているのだろうか。 J/Ψ が u, d クォークによるものならば, 質量が大きいのでこれらを成分とする通常の粒子にどんどん壊れているはずである。新しい量子数“チャーム”によるものならば, それはチャーム量子数の保存のためであろうか。

Ψ が新しい量子数であるチャームをもつ中間子とすると, これが創られるためには

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \Psi(c\bar{c}) \rightarrow \dots \quad (12.7)$$

§12.1 第2世代, 第3世代のクォークの発見

が, たとえば

$$\rightarrow (c\bar{u}) + (\bar{c}u) + \cdots \quad (12.8)$$

のように, 保存則から c または \bar{c} を含む中間子 (できるだけ軽い粒子) の対生成がなければならない。そのような組み合わせの中で最も軽いものは

$$\rightarrow (c\bar{c}) \quad (12.9)$$

であり, これがエネルギーから見て最も小さい。よって Ψ が $(c\bar{c})$ 組成だとする。

§12.1.2 OZI 則 (大久保-ツバイク-飯塚規則)

次に, Ψ の寿命が異常に長いのはなぜだろうか。通常の強い相互作用で壊れる粒子の 1000 倍もの寿命をもつのはなぜであろうか。

強い相互作用を体系づける量子色力学 (QCD) によると, 「始状態と終状態のクォークを表すクォーク線はつながっていなければならない」ことがいえる。

これはもともとベクトル中間子 ϕ^0, ω^0 で展開された議論の延長にあった^{*2}。 ϕ^0, ω^0 の崩壊は主に

$$\phi^0 \rightarrow K^+K^- (K^0\bar{K}^0), \quad \omega^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad (12.10)$$

である。

^{*2} §11.2.3 の桜井の考察参照。

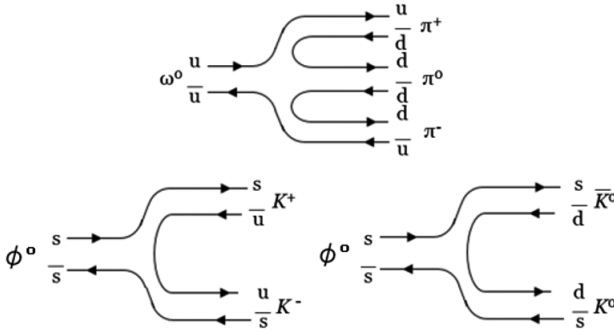


図 12.4: ω^0, ϕ^0 の崩壊のクォーク線図

ω^0 は $(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$ であるから、もともと s クォークを含まず、その崩壊様式は u, d クォークだけからなる粒子に崩壊するのは妥当であるが、一方、

$$\phi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (12.11)$$

が非常に起こりにくいのはなぜであろうか。 ϕ^0 のクォーク組成は (11.39) で示したように $(s\bar{s})$ である。崩壊のクォーク線図を描くと図 12.4 のようになる。このようにクォーク線がつながっているものは起こるが、図 12.5 に示すようにヘアピン型になるものは禁止されるのが**大久保進**、**ツバイク**、**飯塚重五郎**により提唱された **OZI 則** である。問題は $\phi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ が非常に起こりにくいのはなぜか、であったが無理にクォーク線図を書くと、禁止された図で図 12.5 のようになる。このタイプがわずかに起こるのは実際には図 12.6 に示すように 3 つの色つきグルーオンによる結合と考えられる。

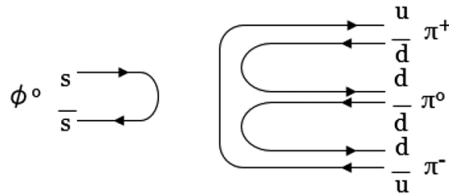


図 12.5: OZI 則で禁止。始状態と終状態のクォーク線が切れているのは禁止

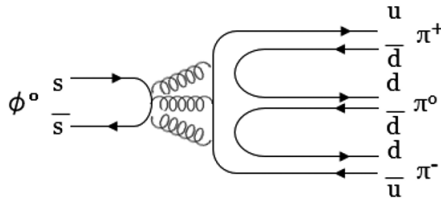


図 12.6: OZI 則禁止でもグルーオンが介在してわずかに崩壊が起こる。

さて, $\Psi(c\bar{c})$ の場合も ϕ^0 と同様で, 図 12.7 の場合や, 図 12.8 の場合などは OZI 則から禁止される。禁止されるといってもグルーオンが介在しているのでわずかに起こる。強く禁止されているということで, 反応としてはグルーオンによる結合がある。

クォークとグルーオンとの結合の強さは α_s であったが, α_s も 2 つのクォーク間の距離によって変わる。別の言葉で言えば, 高エネルギーになるとこの種の力はずっと小さくなり, α_s は減少する。 Ψ が発見されるまでのハドロンは, 質量が $1 \text{ GeV}/c^2$ 程度で, 比較的低エネルギーなので十分強いが, チャームをもつクォークは, u, d クォークなどに比べて 5 倍位の質量なので, このエネル

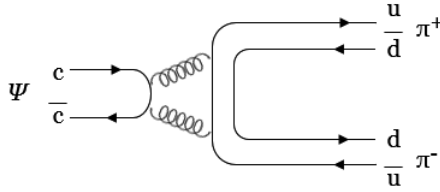


図 12.7: $\Psi(c\bar{c})$ の場合もグルーオン介在の現象がわずかに起こる。

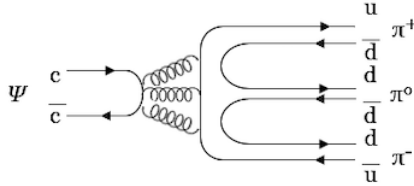


図 12.8: 反応 $\Psi(c\bar{c}) \rightarrow \phi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ のクォーク線図

ギーに富んだクォーク ($c\bar{c}$) の間に働く力は弱くなる。この現象を **running coupling constant** という。 $(c\bar{c})$ の崩壊については、力が弱くなるので崩壊する速さが遅くなる。これは QCD からの結果である。

§12.1.3 チャーム・クォークの質量とチャーモニウム

Ψ の質量は

$$m_{\Psi}(c\bar{c}) = 3 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.12)$$

より

$$m_c \approx 1.5 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.13)$$

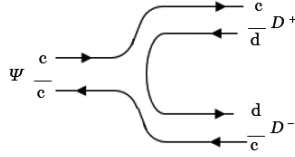


図 12.9: $J/\Psi \rightarrow D^+ D^-$ は運動学的には起こらない。

であることが予想される。これは D 中間子が $(c\bar{u})$ または $(c\bar{u})$ であり, $m_{u,d} \approx 0.3 \text{ GeV}/c^2$, $m_D \approx 1.8 \text{ GeV}/c^2$ であるので

$$m_D - m_u = (1.8 - 0.3) \text{ GeV}/c^2 = 1.5 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.14)$$

であることから予想される。

また, OZI 則で許される過程を示すと図 12.9 になるが, これは

$$(\bar{c}d) \rightarrow D^+, \quad (\bar{c}d) \rightarrow D^- \quad (12.15)$$

として観測されるはずである。事実, J/Ψ の発見より 1~2 年の間にチャームをもつ粒子が続々発見されたが, 上の過程は見つかっておらず, 実際には起こらない過程である。

この過程は

$$2m_D \approx 2 \times 1.8 = 3.6 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.16)$$

であり, $m_\Psi \approx 3 \text{ GeV}/c^2$ であるから

$$m_\Psi < m_{D^+} + m_{D^-} \quad (12.17)$$

となって運動学的には起こらない。

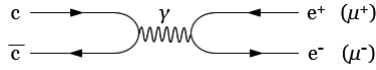


図 12.10: J/ψ の電磁氣的過程による崩壊

結局, J/ψ のハドロンへの崩壊は OZI 則による禁止過程を通じてのみ起こり, 残りの過程は電磁氣的過程になり, 図 12.10 で示されるように

$$\begin{aligned} J/\psi &\rightarrow e^+e^- \quad 7.4\% \\ &\rightarrow \mu^+\mu^- \quad 7.4\% \\ &\rightarrow \text{ハドロン} + \text{radiation} \quad (\gamma \text{ を伴う}) \quad 85\% \end{aligned}$$

である。結果としてこの粒子は長寿命である。

その後, ψ の励起状態 ψ' や, 他のチャームoniumが続々と見つかった。また,

$$D^+ = (\bar{d}c), \quad D^- = (\bar{c}d) \quad (12.18)$$

のようなチャームをもつ中間子も見つかった。そのうち (udc) である Λ_c^+ や, (dsc) である Σ_c も発見され charmed baryon と呼ばれた。

名称	組成	質量 (MeV/ c^2)
J/Ψ	$c\bar{c}$	3095 ± 4
D^\pm	$c\bar{d}, \bar{c}d$	1868.3 ± 0.9
D^0, \bar{D}^0	$c\bar{u}, u\bar{c}$	1863.3 ± 0.9
F^\pm	$c\bar{s}, s\bar{c}$	2039.5 ± 1.0
Λ_c^+	udc	2260 ± 10
Σ_c	dsc	2426 ± 12

12.2 b, t クォーク

§12.2.1 b クォーク

1977 年夏に, FNAL のレーダーマン (L. Lederman), 山内泰二などが

$$\Upsilon(\text{ウプシロン})(b\bar{b}) \quad (12.19)$$

を発見した。400 GeV の陽子ビームを銅や鉛などに衝突させて, 発生する $\mu^+\mu^-$ の不変質量分布から求め

$$m(\mu^+, \mu^-) = 9.5 \text{ GeV}/c^2, \quad 10 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.20)$$

に山があり, これを Υ (ウプシロン), Υ' (ウプシロン・プライム) と名づけた。これを図 12.11 に示す。1977 年に, ドイツの DESY にある **DORIS 検出器**で Υ, Υ' を確認した。現在では, その質量と

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

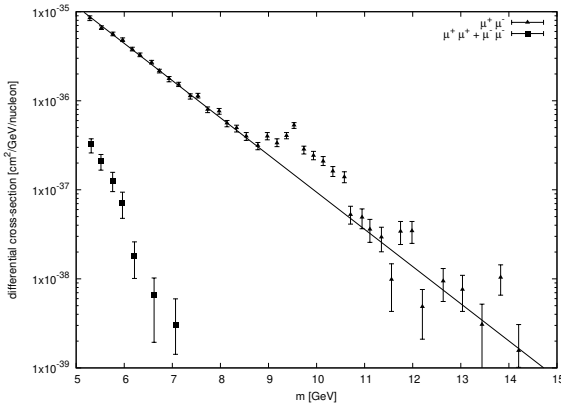


図 12.11: $\mu^+\mu^-$ の不変質量分布による Υ , Υ' の発見

S. W. Herb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39**, 252 (1977) を参照して作図

その広がり幅は

$$m_{\Upsilon} = 9.46 \text{ GeV}/c^2,$$

$$\Gamma_{\Upsilon} = 0.044 \text{ MeV},$$

$$m_{\Upsilon'} = 10.8 \text{ GeV}/c^2,$$

$$\Gamma_{\Upsilon'} = 14 \text{ MeV}$$

である。

§12.2.2 t クォーク

b クォークの発見以来、10 年以上にわたり各国の加速器で t (トップ) クォーク探しがなされた。

我国の**トリスタン (TRISTAN) 加速器**でも、1986 年 11 月に運転を開始し、他グループに先駆けて **VENUS 測定器**でトップ・ハン

ティングが行われた。後で、**TOPAZ**, **AMY グループ**も測定を開始し、 e^+, e^- ビームエネルギーの最高値である $32 + 32 = 64 \text{ GeV}$ までのエネルギーで探索を行ったが、トップは見つからなかった。これは当時の世界最高エネルギーであった。

1989 年夏に CERN の **LEP 加速器**が、 e^+, e^- ビームエネルギーにして $50 + 50 = 100 \text{ GeV}$ で稼動してトップクォークを探したが見つからなかった。

1993 年フェルミラボの **DO グループ**が、 $(t\bar{t})$ 状態を $p\bar{p}$ 加速器で発見した。ハドロンマシンなので非常に複雑な解析の結果の発見であった。現在の質量は、 $172.0 \pm 2.2 \text{ GeV}/c^2$ である。

また、 e^+e^- 衝突における**ルミノシティ** $2 \times 10^{30} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ における 1 日当りのハドロンイベント数を、系のエネルギーとともに示す (図 12.12)。縦軸には、 Ψ, Ψ' そして**トッポニウム** ($t\bar{t}$) があったときのイベント数が示してある。さらに、TRISTAN のエネルギー領域ではハドロン生成の谷間になっていたので、実験の効率が甚だ悪かった。

12.3 時間的光子による粒子発生

電子・陽電子衝突型加速器では、 e^- と e^+ のほぼ正面衝突なので、 e^- と e^+ が消滅した後では運動量は 0 で、エネルギーだけをもつ時間的光子と呼ばれる仮想光子が生成され、この**仮想光子**からハドロ

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

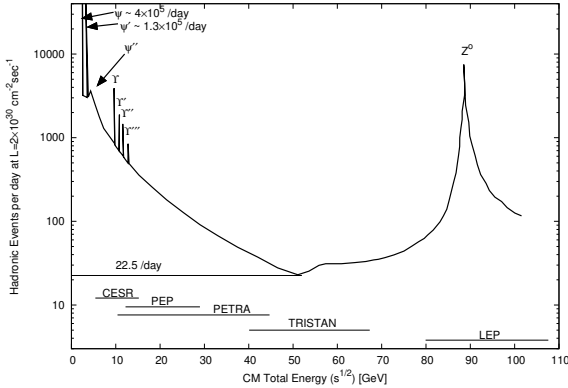


図 12.12: 重心系のエネルギーに対する 1 日当たりのハドロン事象数

S. Bethke, in *High Energy Phenomenology: Proceedings of the Forty Second Scottish Universities Summer School in Physics, St Andrews, August 1993—A NATO Advanced Study Institute*, edited by K. J. Peach and L. L. J. Vick (Institute of Physics Publishing, London, 1994), p. 79 および V. V. Ezhela *et al.*, State Research Center of Russia Institute for High Energy Physics Report No. IHEP 2003-35, 2003 [arXiv:hep-ph/0312114] を参照して作図

ンやレプトンが創られる。すなわち

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \text{ハドロン}$$

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$$

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$$

などの反応がある。図 12.13 に、これらのファインマン図を示す。

ハドロン発生は

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{ハドロン} \quad (12.21)$$

の反応と考えられる。すなわちクォーク・反クォークの発生が中間にある。ファインマン図で、光子 γ と電荷 e をもつ荷電粒子との

§12.3 時間的光子による粒子発生

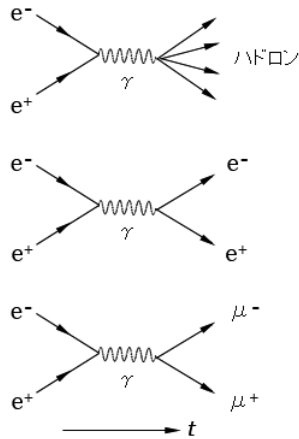


図 12.13: $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow$ ハドロン, e^+e^- , $\mu^+\mu^-$ のファインマン図
($\rightarrow t$ は時間軸方向)

相互作用は、電磁相互作用であるので、反応の振幅は微細構造定数 α の平方根に比例する。これを図 12.14 に示す。

電子・陽電子あるいは $\mu^+\mu^-$ 発生において、反応の振幅は $\sqrt{\alpha}$ に比例し、したがって、反応の起こる割合（確率）は、振幅の 2 乗に比例するので α に比例する。よって、反応の起こる割合は、この

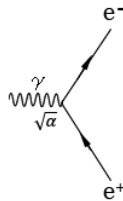


図 12.14: 光子と e^+ , e^- のバーテックスでの反応振幅

バーテックス当たり

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (12.22)$$

に比例する。反応の結果、発生する電荷 e の 2 次粒子の割合は、それらの電荷の積に比例する。

入射粒子が e^- と e^+ なので、反応の結果発生する 2 次粒子と区別できる反応として

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^- \quad (12.23)$$

を基準にとる。この反応の断面積は

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2 \quad (12.24)$$

で表される。ただし

$$s = (\text{重心系のエネルギー})^2 = (E_{e^+} + E_{e^-})^2 = 4E^2 \text{ (GeV}^2\text{)} \quad (12.25)$$

E は e^+ または e^- のエネルギーであり、 $\alpha = 1/137$ とすると

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{86.9}{s} \text{ (nb)} \quad (12.26)$$

で与えられる。

12.4 電子・陽電子衝突反応におけるハドロン発生

電子・陽電子衝突によりハドロンが発生する場合を考えると、図 12.15 のダイアグラムになる。

§12.4 電子・陽電子衝突反応におけるハドロン発生

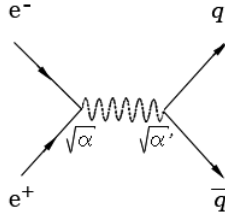


図 12.15: 電子・陽電子衝突によるクォーク・反クォーク発生のファインマン図

α' は電磁結合定数 α の電荷による部分 e^2 をクォークの電荷 $(Qe)^2$ で置き換えたものである。ただし,

$$Q = \frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3} \quad (12.27)$$

である。したがって、**電子・陽電子衝突**によるクォーク対生成の断面積は、自然単位系 ($\hbar = c = 1$) のもとで,

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi\alpha\alpha'}{3s} = Q^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (12.28)$$

で表される。

[例]

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (12.29)$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow d\bar{d}) = \sigma(e^+e^- \rightarrow s\bar{s}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (12.30)$$

よって

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u\bar{u} \\ d\bar{d} \\ s\bar{s} \end{array} \right\} \rightarrow \text{ハドロン} \quad (12.31)$$

の場合の**ハドロン生成**の断面積と、 $\mu^+\mu^-$ 生成の断面積の R 比は

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{ハドロン})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right] \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}{\frac{4\pi\alpha^2}{3s}} \\ = \frac{2}{3}$$

となるはずである。

1972 年頃までは $\sqrt{s} \leq 3\text{GeV}$ のデータしかなかったが、ストレンジ・クォークの発生までのデータでは $R = 2$ であった。量子電磁力学で求めた値と、実験で求めた値の違いのファクター $1/3$ はどこから来るのだろうか。この問題に対する答えは、クォークのカラーにあった。すなわち 1 種類のクォークでも R, G, B の 3 種類のカラーの異なる粒子があることがその原因であった。 u, d, s クォークの場合は

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_R\bar{u}_R, u_G\bar{u}_G, u_B\bar{u}_B, \\ d_R\bar{d}_R, d_G\bar{d}_G, d_B\bar{d}_B, \\ s_R\bar{s}_R, s_G\bar{s}_G, s_B\bar{s}_B \end{array} \right\} \rightarrow \text{ハドロン} \quad (12.32)$$

となるので

$$R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \quad (12.33)$$

$\times 3$ はカラーの自由度によるものであり、上式の値は実験とよく合っていた。

チャーム・クォークが十分発生する $\sqrt{s} = 2E \geq 4.5 \text{ GeV}$ では、クォークの種類は u, d, s, c なので

$$R = \frac{\sigma_h}{\sigma_{\mu\mu}} = 3 \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = \frac{10}{3} \quad (12.34)$$

となって、これは実験値と一致している^{*3}。

クォークが第 1 世代、第 2 世代までとすると R の値は

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \Rightarrow R = 3\frac{1}{3} \quad (12.35)$$

である。

世代が増すと R の値も階段状に増加する。1973 年に小林誠と益川敏英は、 CP 不変性が破れていることから、クォークに第 3 世代があることを予言した。

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (12.36)$$

^{*3} σ_h はハドロン生成に対するものなので、1.5 節で述べた真空からの τ の対生成 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ からの寄与は、実験値から除いて比較する。たとえば $\tau^- \rightarrow d + \bar{u} + \nu_\tau$ などからのハドロンは除いて比較する。

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

一方, 1975 年 **Perl(SLAC)** によってレプトンの**第 3 世代**の 1 つが発見され, これを τ^+, τ^- と命名した。 τ は第 3 番目 (τρίτος) の略である。したがって, レプトンは

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (12.37)$$

の 3 世代からなっている。ただし, この時点ではまだ ν_τ は発見されていない。発見されたのは 2001 年のことである。

ここにおいて, クォークとレプトンの対称性から, クォークの第 3 世代である b, t クォークの存在が強く予想されるにいたった。

b クォークが存在すれば, 反応 $e + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow b\bar{b} \rightarrow$ ハドロンによる断面積は, b クォークの荷電 $-1/3$ の分増加し

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u\bar{u} \\ d\bar{d} \\ s\bar{s} \\ c\bar{c} \\ b\bar{b} \end{array} \right\} \rightarrow \text{ハドロン} \quad (12.38)$$

の反応の R は

$$R = 3\frac{2}{3} \quad (12.39)$$

になるはずである。実際には, これに QCD による補正項

$$\frac{\Delta R}{R} = 5 \sim 6\% \quad (12.40)$$

§12.4 電子・陽電子衝突反応におけるハドロン発生

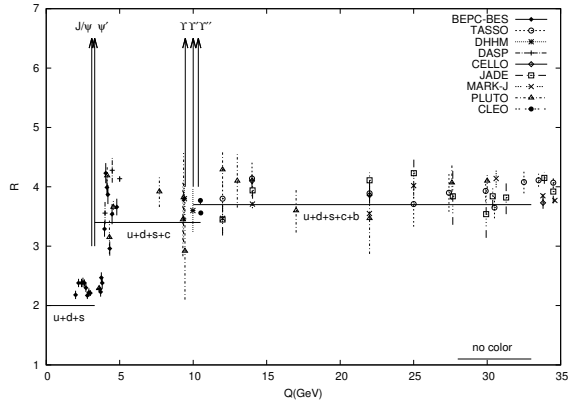


図 12.16: 重心系のエネルギーに対する R 値

F. Halzen and D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (Wiley, New York, 1984), p.229 および K. Hagiwara *et al.*, (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002) を参照して作図

が加算される（終状態 $q\bar{q}$ のグルーオンによる強い相互作用を考慮）。

クォーク発生が起こり、それ以降の e^+e^- の重心系エネルギー \sqrt{s} に対する R の値を図 12.16 に示す。

また、トップクォーク探しを行った例を図 12.17 に示す。このエネルギー範囲ではトップクォークは見つからなかった。

b クォークを含む粒子には Υ, Υ' の他に

$$B^0(b\bar{d}), \bar{B}^0(\bar{b}d), B^-(b\bar{u}), B^+(\bar{b}u) \quad (12.41)$$

などが発見されて、これらは CP の破れのテストなどで重要な意味をもつことになる。

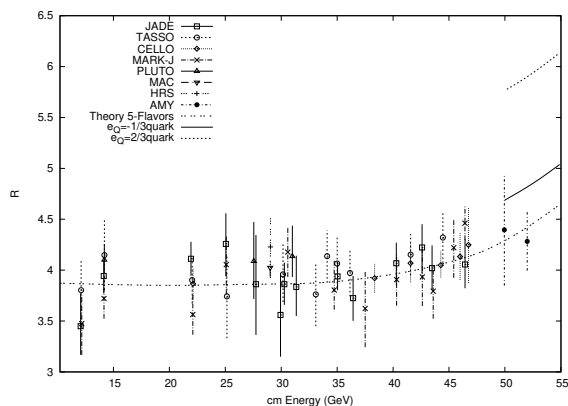


図 12.17: トップクォークの探索例

H. Sagawa *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 93 (1988) を参照して作図

12.5 クォークとレプトンに第 4 世代はあるか

これまで世代数についてわかったことは

$$\text{レプトン} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$
$$\text{クォーク} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

および反粒子

であり、レプトンとクォークの世界は第 3 世代まで対称に存在する。

次の世代はあるのか？

レプトンとクォークの質量を世代ごとに、片対数でプロットしてみる（図 12.18）。クォークとレプトンは横軸の世代に対して、図

§12.5 クォークとレプトンに第 4 世代はあるか

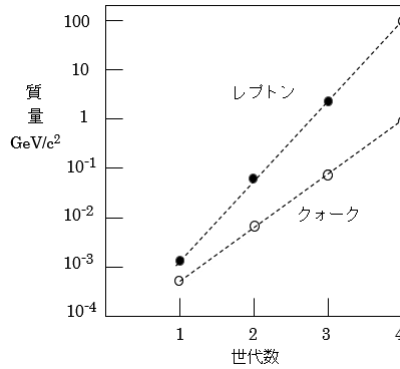


図 12.18: 世代数によるクォーク，レプトンの質量の片対数プロット

のように直線的に並ぶことがわかる。はたして**第 4 世代**は存在するのだろうか。

第 4 世代のクォークで，荷電が $-(1/3)e$ のものを b' とする。トリスタン加速器の 3 グループによる結果を図 12.19 に示す。いずれも確証は得られなかった。

第 4 世代の**重いレプトン**についても実験がなされた。重いレプトンを L とし，それと対になっているニュートリノを ν_L とすれば

$$\begin{aligned}
 e^+e^- &\rightarrow L\bar{L} \\
 \bar{L} &\rightarrow \nu_L + W^- \\
 W^- &\rightarrow \bar{u}d \quad \text{or} \quad \bar{c}s \\
 L &\rightarrow \bar{\nu}_L + W^+ \\
 W^+ &\rightarrow u\bar{d} \quad \text{or} \quad c\bar{s}
 \end{aligned} \tag{12.42}$$

の崩壊を検出する。検出器では $\nu_L, \bar{\nu}_L$ は検出されないので，その

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

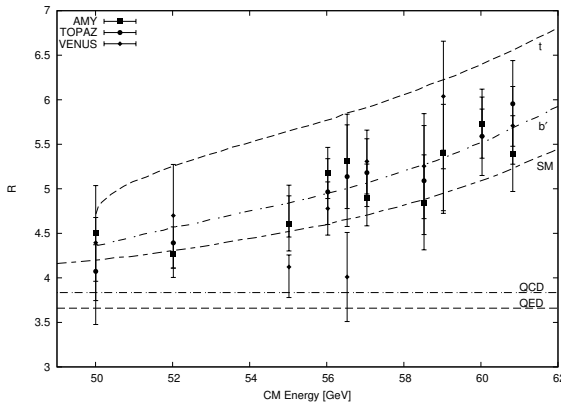


図 12.19: 重心系エネルギーに対する R (AMY, TOPAZ, VENUS グループのデータ)

C. A. Fry, in *New Results in Hadronic Interactions: Proceedings of the XXIVth Rencontre de Moriond, Les Arcs, Savoie, France, March 12–18, 1989*, edited by Jean Tr n Thanh V n (Editions Fronti res, Paris, 1989), p.127 を参照して作図。
 詳細データは <http://hepdata.cedar.ac.uk/review/rsig/> で見る ことができる。

他のハドロンを使用する。このときは、あたかも終状態のエネルギーが保存しないように見える。このようなイベントは、その時点では見つからなかった。これは次の図で示することができる (図 12.20)。この図で、 $q\bar{q}$ への崩壊は q および \bar{q} 方向に多数のハドロンができて、いわゆる **2-jet** イベントれとなるが、互いに 180° の jet ではなく、図 12.21(a) のような軸が偏ったイベントになる。同

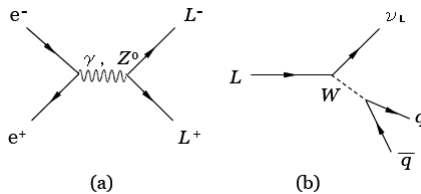


図 12.20: 第 4 世代のレプトンの発生 (a) と崩壊 (b)

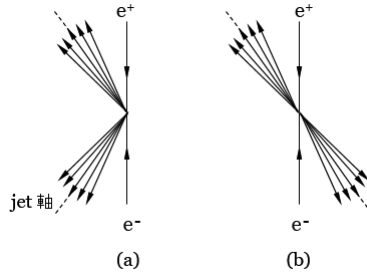


図 12.21: (a) 軸が偏った 2-jet (b) 通常の 2-jet

図 (b) は通常の 2-jet イベントの例である。

12.6 標準モデルによる計算

§12.6.1 R

トリスタン加速器で、トップクォーク領域と思われたエネルギーでの R の実験値を図 12.22 に示す。

1996 年の時点でのトリスタン加速器による実験では、トップクォークは見つからなかった。 R が $\sqrt{s} \geq 35 \text{ GeV}$ で増加するのは

$$e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$$

(f : フェルミオン \rightarrow レプトン, クォーク)

が γ による発生と、エネルギーが大きくなると、弱い相互作用である Z^0 の寄与の 2 つによる。すなわち、電磁相互作用と弱い相互作用が、ワインバーグ、サラムおよびグラシヨウなどによって統一さ

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

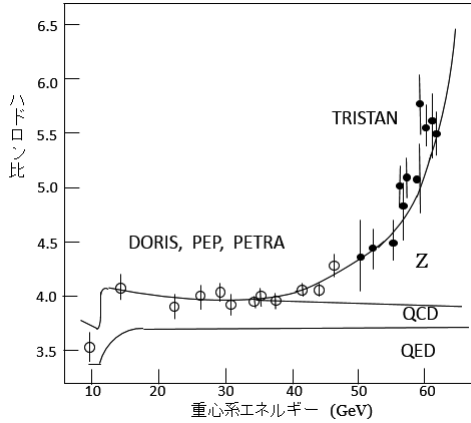


図 12.22: 電子・陽電子衝突型加速器による R の測定値 (1996 年までのデータ)

文部省・高エネルギー物理学研究所「トリスタン計画報告書」(1996)

https://www2.kek.jp/proffice/archives/hyouka/TRISTANreport/3_2_1.html を参照して作図

れ、電弱相互作用となり、いわゆる **GWS 理論** による標準モデル (SM) となった。これによれば、遷移振幅は、純粋の γ だけによる QED の部分 A_{QED} と、 Z^0 による部分 A_{GSW} の和で表され、反応断面積は、図 12.23、図 12.24 から

$$\sigma_{EW}(e^+e^- \rightarrow \gamma, Z^0 \rightarrow f\bar{f}) \approx \frac{1}{s} |A_{\text{QED}} + A_{\text{GSW}}|^2 \quad (12.43)$$

となる。実際の振幅から求めると

$$\begin{aligned} \sigma_{EW}(e^+e^- \rightarrow \gamma, Z^0 \rightarrow f\bar{f}) \\ = \sigma \left(\text{QED} : \sim \frac{\alpha^2}{s} \right) + \sigma(\text{弱} : \sim G^2 s) + \sigma(\text{干渉} : \sim \alpha G) \end{aligned}$$

$$G : \text{フェルミ結合定数} \approx \alpha_W \ll \alpha \quad (12.44)$$

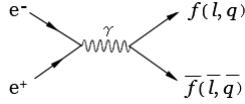


図 12.23: 電磁相互作用による $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 反応

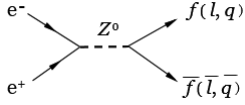


図 12.24: 弱い相互作用による $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ 反応

$$R = \frac{\sigma_h}{\sigma_{\mu\mu}} = \frac{\sigma_h}{\frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

$$= R_{\text{QED}}(\sim 1) + R_{\text{干渉}}\left(\sim \frac{G}{\alpha}s\right) + R_{\text{弱}}\left(\sim \frac{G^2}{\alpha^2}s^2\right)$$

になる。

§12.6.2 W, Z の質量

§16.3 で考察する標準モデルによると

$$\frac{4G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2M_W^2}, \quad M_W : W^+ \text{の質量}$$

$$e = g \sin \theta_W, \quad \theta_W : \text{Weinberg 角}$$

$$\cos \theta_W = \frac{M_W}{M_Z}, \quad M_Z : Z^0 \text{の質量}$$

$$G = (1.16632 \pm 0.00002) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

ここで実験値は $\sin^2 \theta_W = 0.23$ であり、したがって標準モデルより質量は

$$M_W = 80.7 \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.9 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.45)$$

である。

質量の実験値は

$$M_W = 80.425 \pm 0.083 \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2 \quad (12.46)$$

である。標準モデルによる W, Z の質量は、実験値とよく一致している。

§12.6.3 世代 (generation) 数

12.6.3.1 加速器実験

クォークとレプトンの世代が 3 世代であることはすでに述べた。これについて少し詳しく見てみる。

1990 年夏, CERN の LEP 加速器が運転を開始するや否や, ALEPH や他のグループでの実験で, Z^0 生成の質量の幅から, 軽いニュートリノの 3 種類の数があった。 Z^0 がフェルミオンと反フェルミオンに崩壊するときの部分的な質量幅は, 標準モデルで計算できて

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow f \bar{f}) = \frac{G}{6\pi\sqrt{2}} M_Z^3 \frac{(v_f^2 + a_f^2)}{4} \quad (12.47)$$

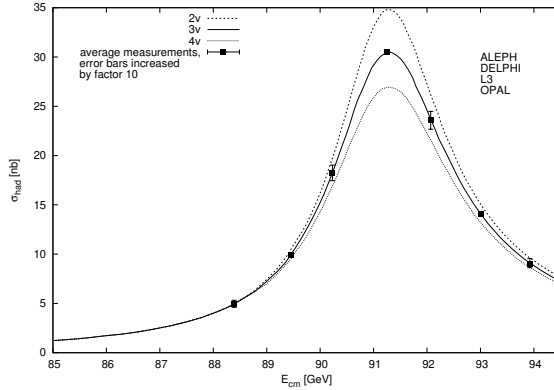


図 12.25: Z^0 の $f\bar{f}$ の崩壊幅と軽いニュートリノの種類の数

The ALEPH Collaboration *et al.*, Phys. Rep. **427**, 257 (2006) を参照して作図

v_f : フェルミオン f に対するベクトル結合定数

a_f : f に対する軸性ベクトル結合定数

ニュートリノに対しては $v_f = a_f = 1$ になる。ニュートリノの種類毎に、図 12.25 に示される部分幅があり、全幅を実験から求め

$$\Gamma_Z = N_\nu \Gamma_{\nu\nu} + 3\Gamma_{ee} + \Gamma_{\text{had}} \quad (12.48)$$

の式を使って N_ν を求めると

$$N_\nu = 3 \quad (12.49)$$

となった。このことを確かめよう。

$\Gamma_{f\bar{f}} = \Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f})$ で、ベクトルおよび軸性ベクトル結合定数 v_f, a_f の値をあげる (表 12.1)。

第 12 章 新世代のクォークと実験的検証

表 12.1: 標準モデルによる $\Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f})$ のベクトル結合定数と軸性ベクトル結合定数の値

f	Q_f	v_f	a_f
ν_2, ν_μ, ν_τ	0	1	1
e, μ, τ	-1	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W = -0.08$	-1
u, c, t	+2/3	$1 - (8/3) \sin^2 \theta_W = 0.40$	1
d, s, b	-1/3	$-1 + (4/3) \sin^2 \theta_W = -0.69$	-1

ワインバーグ角 θ_W は, $\sin^2 \theta_W = 0.23$ とした。したがって

$$Z^0 \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e, \quad Z^0 \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \quad Z^0 \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau \quad (12.50)$$

で, 崩壊の幅は

$$\Gamma_{\nu\nu} = \frac{G}{6\pi\sqrt{2}} \frac{1+1}{4} M_Z^3 = \frac{G}{12\pi\sqrt{2}} M_Z^3 \quad (12.51)$$

である。同様にして $\Gamma_{ee}, \Gamma_{\mu\mu}, \Gamma_{\tau\tau}$ を計算する。これは全部同じ値なので, これらの寄与を $3\Gamma_{ee}$ とする。また, Γ_{uu}, Γ_{dd} などの和をとって Γ_{had} とすると

$$\Gamma_Z = N_\nu \Gamma_{\nu\nu} + 3\Gamma_{ee} + \Gamma_{\text{had}}, \quad (12.52)$$

N_ν : ニュートリノの世代数

が 崩壊での全幅となる。 M_Z には測定した データの山のピーク値

を用いればよい。標準モデルでの $\Gamma_{f\bar{f}}$ の計算値は

$$\begin{aligned}\Gamma_{ee} &= 83.5 \pm 0.5 \text{ MeV} \\ \Gamma_{\nu\nu} &= 166.5 \pm 1.0 \text{ MeV} \\ \Gamma_{\text{had}} &= 1737 \pm 22 \text{ MeV}\end{aligned}\tag{12.53}$$

ただし $\sin^2 \theta_W = 0.230 \pm 0.006$ を用いた。ALEPH グループの実験結果は

$$\begin{aligned}M_Z &= (91.17 \pm 0.070) \text{ GeV}/c^2 \\ \Gamma_Z &= (2.26 \pm 0.15) \text{ GeV} \\ \left(\text{ピークでの断面積} \sigma_{\text{had}}^{\text{peak}} \right) &= (29.3 \pm 1.2) \text{ nb}\end{aligned}$$

であって、この結果

$$N_\nu = 3.27 \pm 0.30\tag{12.54}$$

となった。 $N_\nu = 4$ の仮定は、信頼度 98% で排除された。

したがってレプトンは第 3 世代までであり、もしもレプトンとクォークが対称ならばクォークの世代数も 3 になる。

12.6.3.2 その他の実験

ニュートリノの種類数は、宇宙論からも予測をすることができる。仮定として

1. ニュートリノの質量は 0
2. すべてのニュートリノは Z^0 と同じ強さで結合する

とすると、宇宙の初めの数秒間 ($\sim 3 \times 10^9$ K), ニュートリノの数が多いとエネルギー密度が大きく、これによって宇宙の膨張速度が大きくなる。その結果、中性子が陽子になる時間が短くなり、多くのヘリウム原子核が作られることになる。一方、宇宙のヘリウムの存在比は多くても 26%程度であると予測されていて、このことより、ニュートリノの種類は 3~4 以下であるといえる。

一方クォークのフレーバーに対する制限もある。QCD によれば、エネルギーが高くなればなるほど、強い相互作用の結合定数 α_s は定数ではなくなり、どんどん小さくなることがわかっている (**running coupling constant**)。クォークとクォークの間に働くグルーオンの 4 元運動量 q に対して、 $Q^2 = -q^2$ とすると (図 12.26) **くりこみ (renormalization) 理論**から

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \log(Q^2/\Lambda^2)}, \quad N_f: \text{フレーバーの数} \quad (12.55)$$

が成り立つ。 Λ^2 はこれより大きな Q^2 に対しては α_s が十分小さく、クォークは**漸近的自由**の振る舞いをする。 Q^2 が Λ^2 程度になるとクォークとグルーオンは強く束縛された状態、すなわちハドロンを作るようになる。 Λ の値は実験によって決まり $0.1 \sim 0.5 \text{ GeV}/c^2$ である。よって $\alpha_s(Q^2) > 0$ であるためには $33 - 2N_f > 0$ であり、これより

$$N_f \leq 16 \quad (12.56)$$

となり、クォークの種類は 16 以下である。

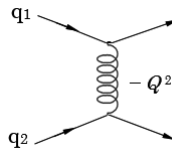


図 12.26: クォークとクォークの間で 4 元運動量が交換される。

以上の宇宙論的な予測と、クォークフレーバーに関する予測とから、クォークとレプトンの種類の数 は 6 か 8 である。現在は 6 種類、3 世代である。

第 13 章

負エネルギー粒子

ディラックは、彼の考案した方程式を解くと、**負エネルギー粒子**の解が得られた。これを解釈するために**ディラックの海**を考え、反粒子を導入した。電子や陽子は粒子という。これに対して、質量や寿命などが同じで、電荷のような符号付きの量が反対符号である**反粒子** (anti-particle) といわれるものがある。反粒子とは何かについて考えてみよう。

誕生したばかりの宇宙には粒子と反粒子が等量あったが、現在の宇宙は粒子の世界のみであるといわれている。なぜ現在の宇宙が粒子だけでできていることになったのかについても考察してみる。

13.1 発端

1927 年にディラックは、アインシュタインの

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (13.1)$$

の式を用いて、 E の 1 次式の量子力学の式を導入するときに運動量 p 、静止質量 m_0 の粒子のエネルギーは、完全解のために

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (13.2)$$

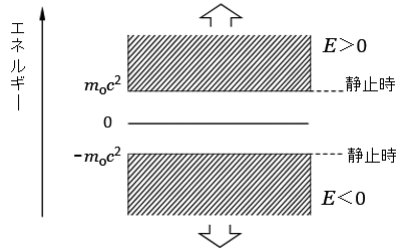


図 13.1: 粒子のエネルギーのとりうる値

の正、負両方の値をとることが必要であることを示した^{*1}。古典力学では、エネルギーが負のものは物理的に意味がないものとして捨ててしまった。しかし、量子力学ではどうだろうか。粒子のエネルギーは図 13.1 に示すように、 m_0c^2 から ∞ までと、 $-m_0c^2$ から $-\infty$ 間の値をとることができる。

ディラック方程式の解は、正、負エネルギーで完全解になる。それでは負エネルギーのもつ意味は何であろうか。

§5.2 で述べたように、相対論的シュレーディンガー方程式としての**クライン・ゴルドン方程式**

$$\left\{ \square - \left(\frac{m_0c}{\hbar} \right)^2 \right\} \phi = 0 \quad (13.3)$$

は

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad (13.4)$$

が基礎になっている。このときの確率密度 ρ および流れの密度 j

^{*1} §9.4.1 参照。

第 13 章 負エネルギー粒子

は、4 元ベクトル j^μ で表すことができ

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (13.5)$$

である。 ϕ は粒子の波動関数、

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{-\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right) \quad (13.6)$$

は (8.18) で導入した反変微分演算子である。自由粒子に対しては

$$\rho = 2E|N|^2, \quad (N \text{ は規格化定数}) \quad (13.7)$$

と表せる。この式より、確率密度は自由粒子のエネルギー E に比例する。その場合には、 $E < 0$ の状態は**負の確率密度**となる！

$\rho < 0$ となる $E < 0$ の解をどうしてくれようか。

完全解となるには $E < 0$ も解に入れなければならない。 $E < 0$ の解をむやみに捨ててしまうことはできない。

ディラックは $\partial/\partial t$ と ∇ (時間と空間) について 1 次の方程式 (9.48) を考案した。この方程式により、負の確率密度を解決した。さらにスピンの $1/2$ の粒子を方程式が記述することがわかった。しかし、負エネルギーはどうすることもできなかった。

13.2 ディラックの空孔理論

ディラックが考えた理論を紹介する。

仮に、負エネルギー状態が無数個あると、正エネルギーの粒子が光子を放射して、負エネルギー状態にすべて落ちてしまう。これを

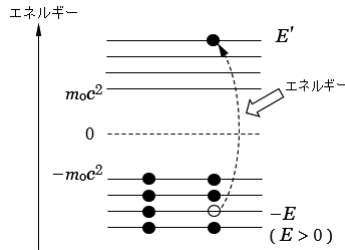


図 13.2: ディラックの空孔が反粒子

防ぐためには、フェルミ粒子が**負エネルギー状態**にぎっしりと詰まっていて、パウリの排他律から粒子は最早入り込むことができないと考えた。これは物質の消滅からの回避である。しかも、負エネルギー状態の粒子が、周りからエネルギーを与えられて正エネルギー状態の粒子となり、もとの負エネルギー状態にできた「孔」が反粒子であるとした。図 13.2 にこれを示す。

これが**ディラックの空孔理論**である。粒子が電子の場合は、図 13.3 に示すようにエネルギーが E の状態の電子が E' の準位に励起される。もとの電荷が $-e$ で、エネルギー $-E$ の電子が消滅して、電荷が e でエネルギーが $+E$ の反粒子が出現する（これが**陽電子**である）。

結局、あるエネルギー（たとえば γ 線）により粒子・反粒子、すなわち電子・陽電子の対生成が起きて反粒子が生成されたことになる。反応として

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad (13.8)$$

が起こり、このときの電子・陽電子のエネルギーは $E_{e^-} + E_{e^+}$ で、

第 13 章 負エネルギー粒子

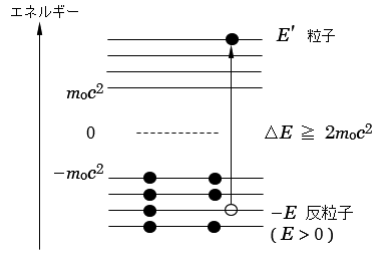


図 13.3: $-E$ の電子が励起されて $+E'$ の陽電子が出現する。

光子のエネルギー E_γ に等しく

$$E_\gamma = E'_{e^-} + E_{e^+} \quad (13.9)$$

である。この際

$$E_\gamma = E'_{e^-} + E_{e^+} \geq 2m_e c^2 \quad (13.10)$$

のエネルギーが必要になる。よって光子のエネルギーは

$$E_\gamma \geq 1.02 \text{ MeV} \quad (13.11)$$

であり、この反応が起こるためには最低 1.02 MeV の光子が必要である。

13.3 電荷密度，電流密度

1934 年までは相対論的波動方程式はディラック方程式のみであった。

1934 年にパウリ達がクライン・ゴールドン方程式の再解釈をした。すなわち、確率密度と流れの密度として (ρ, j) を定義したが、今度はそれに電荷 e をかけて

$$j^\mu \equiv -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (13.12)$$

として、新たに「電子の電荷密度および電流密度」とした。 $\rho = j^0$ は確率密度ではなく電荷密度を表す。これが負であった場合には、反対電荷の電荷密度を表し、電子の反粒子である陽電子の電荷密度を表す。

このことはフェルミ粒子ばかりでなく、ボーズ粒子にも適用できる。ボーズ粒子に対してはディラックの空孔理論が次の点で無力である。すなわち、ボーズ粒子が各エネルギー準位を占めていくときには、パウリの排他律は適用できないから、無限に負エネルギー状態に落ち込んでしまい「ディラックの海」は実現しない。

13.4 負エネルギー状態

負エネルギー状態に対する現代の解釈に関しては、ファインマンなどの次のような解釈がある。

負エネルギー解は「時間と逆向きに進む粒子」

または「時間の向きに進む反粒子」である

図 13.4 のように、 x の正方向に正のエネルギー E^+ で運動している粒子を考える。運動量を p とすると x の正の方向に伝わる波

第 13 章 負エネルギー粒子

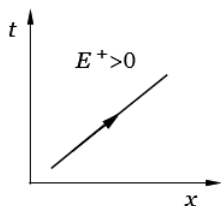


図 13.4: エネルギー正で x の正方向に運動する粒子

動関数は

$$\phi(x, t) = e^{i(px - E^+ t)/\hbar} \quad (13.13)$$

で表される。 x と E^+ , p の関係は

$$x = \frac{E^+}{p} t \quad (13.14)$$

である。負エネルギー E^- の解は

$$\phi(x, t) = e^{i(px - E^- t)/\hbar}, \quad (E^- < 0) \quad (13.15)$$

であり

$$x = \frac{E^-}{p} t = -\frac{|E^-|}{p} t = \frac{|E^-|}{p} (-t) \quad (13.16)$$

が成り立つ。これは時間的に逆行する正エネルギー $|E^-|$ をもつ粒子と同じになる。図 13.5 にこの様子を示す。

それでは「時間に逆行する粒子」とはなんだろうか。

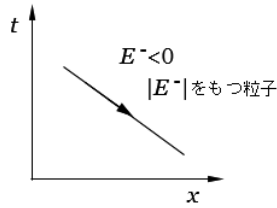


図 13.5: 時間に逆行する粒子

磁場中で荷電 $-e$ をもつ粒子の運動は、ローレンツ力によって曲げられ

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (13.17)$$

であるが、これは

$$= +e \frac{d\mathbf{r}}{d(-t)} \times \mathbf{B} \quad (13.18)$$

と表すことができる。すなわち「電荷 $+e$ で時間的に逆行する粒子は、電荷 $-e$ で時間的に未来へ進む粒子と同じ方程式を満たす」ということがいえる。

以上のことにより

- 電荷 $+e$ で負エネルギーの粒子は、電荷 $-e$ で正エネルギーと同じように振舞う
- 電荷 $-e$ の粒子は、電荷 $+e$ の反粒子

といえる。

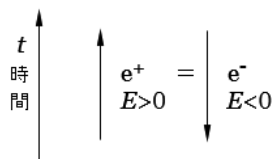


図 13.6: エネルギー正の陽電子放出と、エネルギー負の電子吸収は同じ。

13.5 反粒子を含むファインマン図

全エネルギー E 、電荷 $-e$ の電子の 4 元電流ベクトルは

$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \mathbf{p}) \quad (13.19)$$

であり、同じ E, \mathbf{p} の反粒子（陽電子）の電荷は e だから 4 元電流ベクトルは

$$j^\mu(e^+) = 2e|N|^2(E, \mathbf{p}) = -2e|N|^2(-E, -\mathbf{p}) \quad (13.20)$$

であって、 $-E, -\mathbf{p}$ の電子に対する j^μ とまったく同じになる。よって、ある一つの系で「エネルギーが E の 1 個の陽電子を放出することは、エネルギーが $-E$ の 1 個の電子を吸収することと同じになる」（図 13.6）。

例として、図 13.7 に示すように、光子 γ によって時空 (t_1, x_1) で e^- と e^+ が創られ、 e^+ は (t_2, x_2) で別の電子に出会い、時間的に未来に進む 2 つの γ になることを挙げる（真空中で**対生成**と**対消滅**が起こるため、真空は複雑）。

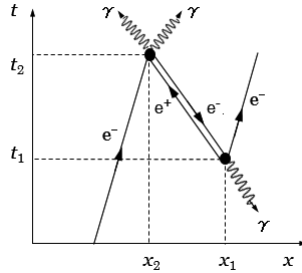


図 13.7: 電子の対生成と対消滅

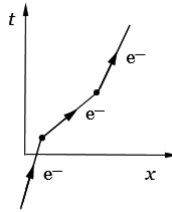


図 13.8: 電子の 2 回散乱 (反粒子は関与しない)

この現象は、時間 t_2 で 2 つの光子を放出して電子は時間的に逆行して (t_1, x_1) まで進み、ここで光子によって散乱されて再び時間的に正の方向に進む^{*2}。

反粒子の関与する現象は、反粒子状態はまったく用いず、負エネルギーの粒子で置き換えれば波動関数をそのまま使うことができる。よって、陽電子の 1 回の散乱は、図 13.9 に示すように 始状態と終状態を交換して、負エネルギーの電子の散乱として扱うことができる。

^{*2} このように粒子の 2 回散乱には反粒子が関与する場合もあるが、図 13.8 に示すように粒子だけの 2 回散乱もある。

第 13 章 負エネルギー粒子

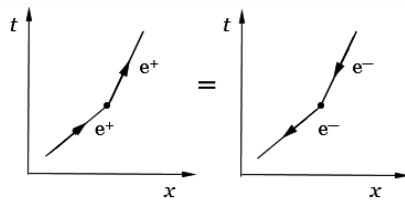


図 13.9: 陽電子の散乱は、始状態と終状態を交換した負エネルギーの電子の散乱と同じ。

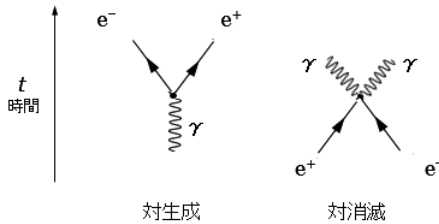


図 13.10: 粒子線で表した対生成と対消滅

このような図では粒子の時間的走行を粒子線で表す（図 13.10 を参照）。

このようにして、フェルミ粒子に対してもボーズ粒子に対しても統一的な反粒子（負エネルギーの粒子）の概念が得られた。

反粒子を時間に逆行する粒子とみなすと、粒子と反粒子は時間的に逆に動いているだけなので質量は

$$m_{\text{粒子}} = m_{\text{反粒子}} \quad (13.21)$$

であり、スピンは

$$S_{\text{粒子}} = S_{\text{反粒子}} \quad (13.22)$$

である。また、光子による粒子・反粒子の対生成においては、初めの光子の量子数がゼロであるから、加算的量子数が保存量であるならば（バリオン数、レプトン数、電荷など）は、反粒子のそれは粒子と逆符号である。すなわち、**バリオン数**は

$$B_{\text{粒子}} = -B_{\text{反粒子}} \quad (13.23)$$

レプトン数は

$$L_{\text{粒子}} = -L_{\text{反粒子}} \quad (13.24)$$

などである。

13.6 反粒子のアイソスピン

§13.6.1 アイソスピン

陽子と中性子を例にとる。陽子と中性子の質量はそれぞれ

$$m_p \approx 938 \text{ MeV}/c^2, \quad m_n \approx 940 \text{ MeV}/c^2 \quad (13.25)$$

である。これらに最も近い質量をもつ重粒子の Λ は

$$m_\Lambda \approx 1116 \text{ MeV}/c^2 \quad (13.26)$$

第 13 章 負エネルギー粒子

であり、陽子・中性子の質量から離れている。陽子・中性子はスピ
ンが $1/2$ で、パリティが正、質量もほとんど同じ値で、異なるのは
荷電だけである。これらのことから、陽子・中性子は、同一粒子・
核子の荷電だけ異なった粒子と考えられる。質量のわずかな違いは
荷電の違いによる。陽子・中性子は核子の 2 つの状態と考え、陽
子・中性子はそれぞれ

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13.27)$$

と表現する。スピンの $S = 1/2$ の粒子は、スピンの上向き
($S_z = 1/2$) と、下向き ($S_z = -1/2$) の二つの状態があるように、核
子はアイソスピンまたは荷電スピン I をもつ。スピンとの類推で、
状態が 2 つあることから核子のアイソスピンは $I = 1/2$ をもち、こ
れが上向き (第 3 成分が $I_3 = +1/2$) の状態が陽子であり、下向き
($I_3 = -1/2$) の状態が中性子であるとする。アイソスピンはハイ
ゼンベルグによって考えられた。アイソスピンは仮想的な荷電空間
での角運動量と考えることができる。強い相互作用ではアイソスピ
ンの保存則が成り立つ。電子などのレプトンは強い相互作用をしな
いのでアイソスピンはもたない。

原子核を形成している核力は荷電空間での回転に関して不変であ
り、陽子と中性子による違いは生じず、したがって、 pp, pn, nn 間
の相互作用は等しく、核力の荷電独立性が成り立っている (電磁相
互作用の効果を除けば成り立っている)。アイソスピン I に対し

$$I_3 = I, I-1, \dots, -I \quad (13.28)$$

§13.6 反粒子のアイソスピン

の $(2I + 1)$ 個の状態がある。これを**荷電多重項** (charge multiplet) という。粒子の状態を表すのに、電荷を Q 、アイソスピンの第 3 成分を I_3 、**重粒子数**を B とすると

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \quad (13.29)$$

の関係が成り立っている (**ゲルマン・西島の式** (11.1) の一部)。

アイソスピンの状態を記述するためには**ディラックのケットベクトル**を使う。アイソスピン I 、第 3 成分 I_3 の状態を

$$|I, I_3\rangle \quad (13.30)$$

と表す。この記法を使うと

$$\text{陽子} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \text{中性子} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (13.31)$$

と表せる。パイ中間子の場合には、核子はある瞬間にパイ中間子の発生が起こり

$$N \rightarrow N + \pi \quad (13.32)$$

仮想的なパイ中間子を伴う。この反応は強い相互作用なので、アイソスピンは保存する。したがって、核子 N は $I = 1/2$ であり、 $N + \pi$ 系も $I = 1/2$ なので π のアイソスピンは 0 か 1 である。パイのアイソスピンが $I_\pi = 0$ ならパイ中間子は 1 種類しかないが、現実には π^+, π^0, π^- の種類がある。よってパイ中間子のアイソスピ

第 13 章 負エネルギー粒子

ンは 1 である。ケットベクトルを使うと

$$\begin{aligned}\pi^+ &\text{は } |1, 1\rangle & m_{\pi^+} &\approx 140 \text{ MeV}/c^2 \\ \pi^0 &\text{は } |1, 0\rangle & m_{\pi^0} &\approx 135 \text{ MeV}/c^2 \\ \pi^- &\text{は } |1, -1\rangle & m_{\pi^-} &\approx 140 \text{ MeV}/c^2\end{aligned}$$

と表すことができる。このときには、電荷とアイソスピンの関係式 (13.29) はパイ中間子の重粒子数 0 なので

$$Q = I_3 \quad (13.33)$$

となる。パイ中間子は、荷電スピン空間ではベクトルであり、通常の空間ではスカラーである。このように、荷電スピン空間と通常の空間での性質は何の関係もない。表 13.1 に代表的な粒子のアイソスピンを挙げる。

§13.6.2 反粒子のアイソスピン

核子に作用する演算子としてのアイソスピン行列は

$$I_i \equiv \frac{\tau_i}{2} \quad (13.34)$$

としてパウリのスピン行列 (9.14) と同様

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13.35)$$

と考えることができる。これらは核子の状態である陽子、中性子 (13.27) に作用する。

表 13.1: 代表的な粒子のアイソスピン

中間子			重粒子		
粒子	反粒子	I	粒子	反粒子	I
K^+	K^-	$1/2$	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	0
K^0	\bar{K}^0		Σ^+	$\bar{\Sigma}^-$	
η^0	$\bar{\eta}^0$		Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	
D^+	D^-	$1/2$	Σ^-	$\bar{\Sigma}^+$	1
D^0	\bar{D}^0		Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	
F^+	F^-		Ξ^-	$\bar{\Xi}^+$	
B^+	B^-	$1/2$	Ξ^-	$\bar{\Xi}^+$	$1/2$
B^0	\bar{B}^0		Ω^-	$\bar{\Omega}^+$	
			Λ_τ^+	$\bar{\Lambda}_\tau^-$	

次に、特別なアイソスピン変換として、第 2 軸の周りの 180° 回転を考える。ただし、ここでは物理系を回転する。回転の演算子は

$$e^{-i\pi(\tau_2/2)} = -i\tau_2 \quad (13.36)$$

ただし、 $e^{\pm(\pi/2)i} = \pm i$ を用いた。したがって、核子の状態は

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = e^{-i\pi(\tau_2/2)} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = -i\tau_2 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (13.37)$$

に変換される。一方、反粒子に対しては、粒子・反粒子変換演算子によって

$$Cp = \bar{p}, \quad Cn = \bar{n} \quad (13.38)$$

第 13 章 負エネルギー粒子

と定義され、前述の回転後の核子に C 変換を行うと

$$C \begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (13.39)$$

になり、この式は反粒子を用いて記述すると

$$\begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} \quad (13.40)$$

になる。核子と反核子の 2 重項が同じ変換をするならば、粒子・反粒子の合成系は同じクレブシュ・ゴルダン係数（詳細は §14.3 参照）を用いて表すことができる。ただし、次の 2 点を変更する。

1. 荷電が大きい方を $I_3 = 1/2$ とする。

$$\begin{cases} \bar{n}(Q = 0) \\ \bar{p}(Q = -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3 = +1/2 \\ I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (13.41)$$

2. (13.37) と同じ変換式になるように符号を導入する。すなわち

$$\begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} \quad (13.42)$$

である。

このことより、反粒子の組 $(-\bar{n}, \bar{p})$ と、粒子の組 (p, n) はまったく同じ変換をする。

核子・反核子の合成系は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 |I = 1, I_3 = 1\rangle &= -p\bar{n} \\
 |I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n}) \\
 |I = 1, I_3 = -1\rangle &= n\bar{p} \\
 |I = 0, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} + n\bar{n})
 \end{aligned}$$

2つの角運動量を合成するときの**クレブシュ・ゴルダン係数**について、 $j_a = j_b = \frac{1}{2}$ の場合に (14.56) から得られる結果

m_a	m_b	J m	1	1	0	1
			1	0	0	-1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				1

(13.43)

を用いた。

13.6.2.1 クォークの合成系

上に示したことをクォーク・反クォークの合成系に適用してみる。
クォークは u, d クォークを考える。

クォーク	スピン	Q	I_3	
u	$1/2$	$2/3$	$1/2$	(13.44)
d	$1/2$	$-1/3$	$-1/2$	

u, d クォークはアイソスピンが $1/2$ の粒子であるので、前述の核子の議論で $(p, n) \rightarrow (u, d)$, $(\bar{n}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{d}, \bar{u})$ とすればよい。したがって

$$\begin{aligned}
 |I = 1, I_3 = 1\rangle &= -u\bar{d} \\
 |I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\
 |I = 1, I_3 = -1\rangle &= d\bar{u} \\
 |I = 0, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})
 \end{aligned}$$

が成り立ち、上の 3 個の状態は π^+, π^0, π^- に相当する。

13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか

もともと物理法則は対称であり、宇宙の始まりには粒子と反粒子はまったく対等に存在していたと考えられる。しかし、現在の宇宙は粒子で構成されていて、反粒子でつくられている物質はないと言われている。これはなぜであろうか。

§13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか

宇宙創成時に考えられることは、

- 1) 特別な条件がないこと
- 2) ビッグバン以降の法則は、現在の法則と同じものであると考えられているが、これは実験によって検証される必要がある

ビッグバンには莫大なエネルギーが関与していて、いたるところで

$$\gamma \rightarrow q + \bar{q}, \quad q + \bar{q} \rightarrow \gamma \quad (13.45)$$

の反応で、物質・反物質の生成と消滅が起こっていた。ところが、宇宙が冷えるにしたがってこれが起こらなくなり、その結果としてクォークと反クォークは同数であった。それなのに何故我々の周りから反物質は姿を消したのだろうか。少なくとも陽子・中性子が生成されて (ビッグバンからおおよそ 10^{-3} 秒後) 以降は、粒子、反粒子の数に差が生じるような現象は何事も起こらなかった。いつ粒子・反粒子数を変えるようなことが起こったのだろうか。

この問いに対する答えは3つ考えられる。

- a) ビッグバンでは始めから物質のほうが多かった。しかし、これは上に述べた 1) に反する。
- b) 反物質の世界がどこかにある。

反物質の世界：宇宙は粒子の部分と反粒子の部分からなる場合 (図 13.11)。これは、粒子・反粒子の混在系から粒子の系と反粒子の系を分離して取り出すことになり、この確率はきわめて小さく否定的である。

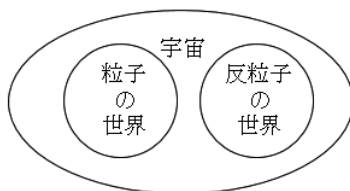


図 13.11: 反物質の世界がどこかにある。

c) 物質生成以前 (10^{-3} 秒) の何らかの過程で

$$\text{クォーク数}(N_q) > \text{反クォーク数}(N_{\bar{q}}) \quad (13.46)$$

となることがあった。

ここでは c) について考察してみる。

(i) ビッグバンのときの莫大なエネルギーで

$$\gamma \rightarrow X + \bar{X} \quad (13.47)$$

によって多量の X, \bar{X} 粒子が創られる。ただし, この段階では X, \bar{X} ともに同じ数である。粒子の質量は

$$m_X \approx 10^{15} \text{ GeV}/c^2 \quad (13.48)$$

と見込まれている。また, X, \bar{X} の消滅過程

$$X + \bar{X} \rightarrow \gamma \quad (13.49)$$

も起こっている。

§13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか

- (ii) 宇宙が膨張するにしたがって宇宙の温度は低くなり (13.47) の反応は少なくなる。その代わり X, \bar{X} の崩壊過程

$$X \rightarrow q + q \quad \text{または} \quad \bar{q} + \bar{l} \quad (l \text{ はレプトン})$$

$$\bar{X} \rightarrow \bar{q} + \bar{q} \quad \text{または} \quad q + l$$

によるクォーク、レプトンが生成される。このとき、 X と \bar{X} が同じ割合で崩壊すれば q と \bar{q} , l と \bar{l} の数は同じである。すなわち、物質と反物質の対称性が成り立っている。ところが、§10.5 で述べたように 1964 年にクローニンとフィッチが物質と反物質の非対称性を発見した。これは大きな発見である。

次に、彼らの実験をみてみよう。 K^0, \bar{K}^0 の崩壊

$$K^0 \rightarrow e^+ \pi^- \bar{\nu}, \quad \bar{K}^0 \rightarrow e^- \pi^+ \nu \quad (13.50)$$

で生じた $(e^+, \pi^-, \bar{\nu})$ と (e^-, π^+, ν) は、この順に反粒子と粒子の関係にある。実験結果は、初め K^0 と \bar{K}^0 が同数であってもこれらの崩壊は同等ではなく、 K^0 崩壊の方が \bar{K}^0 崩壊よりも $\sim 7/1000$ 程度多く見られた。

これは「**CP 不変性の破れ**」といわれるものであった。その後、CP の破れの数多くの実験がなされ、特に著名な実験として **KEK** (高エネルギー加速器研究機構) での **B ファクトリー** を挙げることができる。 X, \bar{X} の崩壊の場合にも 不変性の破れが期待される。

第 13 章 負エネルギー粒子

X, \bar{X} の $(qq), (\bar{q}\bar{q})$ へ崩壊する割合を

$$X \rightarrow a(qq) + (1-a)(\bar{q}\bar{l})$$

$$\bar{X} \rightarrow b(\bar{q}\bar{q}) + (1-b)(ql)$$

とする。 a, b は時間についての崩壊率を表す。 $a = b$ なら q と \bar{q} の数は同じで

$$N_q = N_{\bar{q}}, \quad N_l = N_{\bar{l}} \quad (13.51)$$

である。 $a > b$ なら

$$N_q > N_{\bar{q}}, \quad N_l > N_{\bar{l}} \quad (13.52)$$

である。

q, \bar{q} に着目すると N 個の X および \bar{X} の崩壊による q, \bar{q} の個数は

$$N_X \rightarrow N \left(a(qq) + (1-a)(\bar{q}\bar{l}) \right) \quad (13.53)$$

$$N_{\bar{X}} \rightarrow N \left(b(\bar{q}\bar{q}) + (1-b)(ql) \right) \quad (13.54)$$

より

$$\begin{aligned} N_q &= 2aN + (1-b)N = (2a-b+1)N, \\ N_{\bar{q}} &= (2b-a+1)N \end{aligned} \quad (13.55)$$

になる。 q と \bar{q} の数の差は

$$N_q - N_{\bar{q}} = 3(a-b)N \quad (13.56)$$

§13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか

である。 $a > b$ なら上式は正であり,

$$N_q > N_{\bar{q}} \quad (13.57)$$

である。

レプトンについても同様に、 X, \bar{X} の崩壊による数はそれぞれ $N_l = (1 - b)N$, $N_{\bar{l}} = (1 - a)N$ であり l と \bar{l} の数の差は

$$N_l - N_{\bar{l}} = (a - b)N \quad (13.58)$$

になる。これが正であるとすれば

$$N_l > N_{\bar{l}} \quad (13.59)$$

であることがいえる。

もちろん $a < b$ のときは反粒子の数のほうが多いことになる。この時点では対等にどちらの場合も起こりうるが、この宇宙は粒子と考える。

次に、粒子・反粒子の消滅過程によって光子に変わることを考える。

$$q + \bar{q}, l + \bar{l} \Rightarrow \gamma \quad (13.60)$$

によって、ありったけの反クォーク・反レプトンは消滅してしまう。したがって、消滅による γ の個数は反クォーク・反レプトンの個数になる。

$$N_\gamma \approx N_{\bar{q}} + N_{\bar{l}} \quad (13.61)$$

第 13 章 負エネルギー粒子

ちなみに $N_{\bar{q}} = (2b - a + 1)N$, $N_{\bar{l}} = (1 - a)N$ であったから

$$N_{\gamma} = 2(b - a + 1)N \quad (13.62)$$

である。

γ にならずに、余ったクォークとレプトンが宇宙の物質になる。
バリオン (qqq) の数は

$$N_B \approx (N_q - N_{\bar{q}})/3 = (a - b)N \quad (13.63)$$

である。宇宙全体の陽子と中性子を合わせた個数は $\sim 10^{-6} / \text{cm}^3$ が見込まれていて、3 K 背景輻射中の光子の数は、この消滅過程での光子の名残りであり $\sim 500 / \text{cm}^3$ と見積もられているので、それらの誤差の程度も考慮すると

$$\frac{N_B}{N_{\gamma}} \approx 10^{-9 \pm 1} \quad (13.64)$$

となる。ここで

N_{γ} : 粒子・反粒子の消滅過程で創られた光子数

N_B : 残りのバリオン数

である。反物質の大部分は、宇宙創成の初めの 10^{-6} 秒を生き残ることはできなかったと見積もられている。

現在では、バリオンと光子の数の比は

$$\frac{N_B}{N_{\gamma}} = \frac{a - b}{2(1 + b - a)} \approx 10^{-9} \quad (13.65)$$

§13.7 この宇宙の反粒子は何処へ行ったか

と見込まれている。

このように、宇宙の初期において、粒子 X と反粒子 \bar{X} の崩壊率がわずかに異なることが物質宇宙となったことになる。なぜ X 粒子の崩壊確率の方が \bar{X} のそれより大きかったのかについては議論の余地がある。

第 14 章

回転運動とスピン

スケーターがスピンをしながら、広げていた両腕を折りたたんで胸に押し付けていくと、見事に回転は速くなっていく。物体の運動には直線運動と**回転運動**がある。ここでは、回転運動を特徴づけるものと、**スピン**といわれる量子力学上の自己回転的な量を扱う。以下の記述は、多少数式的なものになる。

14.1 軌道角運動量

軌道角運動量を L とすると、§11.2.2 の回転群で示したように、物理系を z 軸の周りに角度 θ の回転を引き起こす演算子は

$$e^{-i\theta L_z/\hbar} \quad (14.1)$$

であった。同様に x, y 軸の周りの回転を引き起こす演算子は

$$e^{-i\theta L_x/\hbar}, \quad e^{-i\theta L_y/\hbar} \quad (14.2)$$

である。

次に、これらが交換できない（非可換）演算子であることを示す。図 14.1 に示すように、 z 軸上の棒状の物体を

- (I) x 軸の周りに $\frac{\pi}{2}$ 回転し、続いて y 軸の周りに $-\frac{\pi}{2}$ 回転するこ

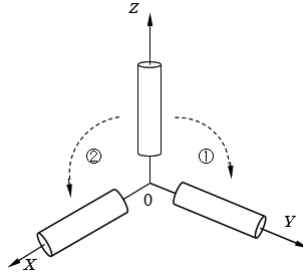


図 14.1: 棒の回転で, x 軸の周りに $\pi/2$ 回転し次いで y 軸の周りに $-\pi/2$ 回転する (I) と, 順序を入れ替えた (II) では結果が違う。

とと

(II) y 軸の周りに $-\frac{\pi}{2}$ 回転し, 続いて x 軸の周りに $\frac{\pi}{2}$ 回転すること

では, 回転の順序を入れかえた (I), (II) の結果がまったく違う。実際, 図 14.1 に示すように, 結果として (I) では物体が y 軸上にあり, (II) では x 軸上にあることになる。これより

$$e^{-i\theta L_x/\hbar} e^{-i\theta' L_y/\hbar} \neq e^{-i\theta' L_y/\hbar} e^{-i\theta L_x/\hbar} \quad (14.3)$$

である。すなわち回転は非可換である。

次に, 角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の成分

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x \quad (14.4)$$

第 14 章 回転運動とスピン

の定義式に，運動量 \mathbf{p} の演算子

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (14.5)$$

を代入し，角運動量演算子の交換関係を表そう。

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ L_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (14.6)$$

であるので，まず L_x と L_y の交換関係を示す。交換関係

$$[L_x, L_y] \equiv L_x L_y - L_y L_x \quad (14.7)$$

がどう表せるかを調べる。これに上の (14.6) の表示を代入する。

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= (-i\hbar)^2 \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= (-i\hbar)^2 \left\{ \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \\ &= (-i\hbar)^2 \left\{ \left(y \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z} x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} z \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(z \frac{\partial}{\partial x} y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} z \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$y \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial x} y \frac{\partial}{\partial z} = y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - zy \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = y \frac{\partial}{\partial x} \quad (14.8)$$

$$y \frac{\partial}{\partial z} x \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial z} y \frac{\partial}{\partial z} = yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} - xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0, \quad (14.9)$$

などを使うと

$$[L_x, L_y] = (-i\hbar)^2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar L_z \quad (14.10)$$

が得られる。何事かをなすのに、二つの量の順序を入れ替えると、結果として余りが出る。

座標 x とその方向の運動量 p_x とでは $p_x = -i\hbar \partial / \partial x$ であるから

$$\begin{aligned} [x, p_x] &= xp_x - p_x x \\ &= x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \\ &= i\hbar \frac{\partial x}{\partial x} \\ &= i\hbar \end{aligned}$$

となって、 x と p_x の交換でも $i\hbar$ の余りが生じる。

同様にして角運動量の演算子としての交換関係

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (14.11)$$

が導かれる。

角運動量の大きさの 2 乗は

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (14.12)$$

第 14 章 回転運動とスピン

で、交換関係を用いると

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0 \quad (14.13)$$

が得られ、交換可能である。

A と B が交換可能であるときは、 A の固有状態が同時に B の固有状態になるようにできるので、系の回転の固有状態は、 L^2 すなわち角運動量の大きさの 2 乗と、たとえば L_z の値を与えることで決まる。

角運動量の大きさとして $l\hbar$ 、 L_z の値として $m\hbar$ を与えるものとする。このとき L_x, L_y は定まらない。この固有状態を $\psi_{l,m}$ とする。これが L^2, L_z の固有状態であるから

$$L^2\psi_{l,m} = l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m}, \quad L_z\psi_{l,m} = m\hbar\psi_{l,m} \quad (14.14)$$

とおくことができる。ここでよく知られているように

$$l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = l, l-1, \dots, -l \quad (14.15)$$

で各 l について $(2l+1)$ 個の状態がある。 $l=3$ の状態を図 14.2 に示す。

孤立系の角運動量は保存する。これをスケーターのスピンの適用してみる。スケーターは氷の上にいるのでほぼ孤立系と見なしてよい。スケーターが腕を伸ばしていたときの角運動量と、腕をたとえば半分に折りたたんだときの角運動量は等しい。腕を半分に折りたたんだときの体の重心から見た慣性モーメント I は、たたまない場合の $1/4$ である^{*1}。スケーターを剛体とみなしたときの角運動量の

^{*1} $dI = dm \cdot r^2$, m は質量, r は回転軸からの距離。

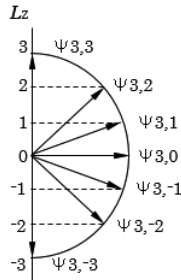


図 14.2: 固有状態 $\psi_{l,m}$ で $l = 3$ のときの状態図

大きさ L , 慣性モーメント I , 角速度 ω との関係 $L = I\omega$ より, I が $1/4$ なので ω は 4 倍になる。すなわち, 4 倍の回転数になる。

14.2 スピン

素粒子は, ある種の自転に相当する内部回転運動の角運動量をもっている。この**内部回転の角運動量**をスピンという。現実の回転運動とは異なるものであることは次の例を考えればよい。電子のスピンは $\hbar/2$ である。角運動量の定義で $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ に従えば, 電子の半径が古典電子半径 $2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$ とすると, この半径の周辺に全質量があったとしても電子のスピンを表すには, 球の周辺部では光速を遥かに超えるものとなる。陽子なら 10^{-15} m であり, 粒子表面では自転の速さが光速を超えてしまうのでこの描像は破綻をきたす。さらに, 質量ゼロの光子やニュートリノでさえスピン $1, 1/2$ をもっている。よってスピンの存在はそのまま事実として認識すべきものである。

第 14 章 回転運動とスピン

一般に、粒子のスピンが大きくなると質量が大きくなり不安定になる。

スピンを S と表すと、スピンの大きさは $S\hbar$ と表すことができる。さらに、スピンの回転軸の自由度は $(2S+1)$ 個の状態をとりうる。すなわち、 S_z が $(S, S-1, \dots, -S)$ (\hbar 単位) の回転軸の向きの自由度をもつ。

軌道角運動量は $(2l+1)$ (奇数) 個の状態をもったが、スピンは軌道角運動量の場合とは異なって自由度が $2, 4, \dots$ の粒子が存在する。 \hbar を省略すると自由度が 2 および 4 のときはそれぞれ

$$2S+1=2 \quad (14.16)$$

よって

$$S = \frac{1}{2}, \quad (14.17)$$

$$2S+1=4 \quad (14.18)$$

よって

$$S = \frac{3}{2} \quad (14.19)$$

であって、スピンの半整数となる。

陽子や電子のように $S\hbar = \hbar/2$ であるものは、 z 成分が $S_z = \hbar/2, -\hbar/2$ である。このような S_z になる**固有状態**として u_+, u_- が存在しそれぞれ

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.20)$$

と表すことができる。一般に固有状態 u は

$$u = au_+ + bu_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (14.21)$$

と表せて $|a|^2$, $|b|^2$ はそれぞれ

$$S_z = +\frac{\hbar}{2}, \quad -\frac{\hbar}{2} \quad (14.22)$$

をとる確率を表す。ここで

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (14.23)$$

である。

内部回転に対して、軌道角運動量と同様に

$$e^{-i\theta S_z/\hbar} \quad (14.24)$$

が z 軸の周りの**回転演算子**とすると、交換関係も L の場合と同様になる。

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad (14.25)$$

とおくと、**交換関係**は次のようになる。

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \quad (14.26)$$

また、 u_{\pm} が $\sigma_z = \pm 1$ の固有状態であることから

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.27)$$

第 14 章 回転運動とスピン

となる。これは

$$\sigma_z u_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_+ \quad (14.28)$$

などから明らかである。

$$\sigma_{\pm} \equiv \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2} \quad (14.29)$$

とおくと、 σ の交換関係から、これらの演算子は、スピン S_z の値を ± 1 (\hbar 単位) だけ変えるものである。

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.30)$$

となる。たとえば

$$\sigma_- u_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_- \quad (14.31)$$

である。以上のことよりパウリのスピン行列 (9.14) が導かれる。

14.3 角運動量の合成

§14.3.1 全角運動量

粒子の軌道角運動量を L 、スピン角運動量を S とすると全角運動量は

$$J = L + S \quad (14.32)$$

と表すことができる。

質点が 2 つあり、その状態をそれぞれ ψ_a, ψ_b とする。この系全体では

$$\psi = \psi_a \psi_b \quad (14.33)$$

である。

この系が z 軸の周りに $\Delta\theta$ の回転により ψ は

$$\left(1 - i\frac{\Delta\theta}{\hbar}J_z^a\right)\psi_a \left(1 - i\frac{\Delta\theta}{\hbar}J_z^b\right)\psi_b = \left\{1 - i\frac{\Delta\theta}{\hbar}(J_z^a + J_z^b)\right\}\psi_a\psi_b \quad (14.34)$$

になる。ここで J_z^a は ψ_a のみに作用し、 J_z^b は ψ_b のみに作用する演算子であり、 $J_z = J_z^a + J_z^b$ である。よって一般に

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^a + \mathbf{J}^b \quad (14.35)$$

であって、 \mathbf{J}^a と \mathbf{J}^b の各成分は独立であるので可換である。

また

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \quad (14.36)$$

が成り立つ。上の第一の式は次のようにして示せる。

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= [J_x^a + J_x^b, J_y^a + J_y^b] = [J_x^a, J_y^a] + [J_x^b, J_y^b] \\ &= i\hbar(J_z^a + J_z^b) = i\hbar J_z \end{aligned}$$

さて、合成系の回転の状態は $(\mathbf{J}^a)^2, (\mathbf{J}^b)^2, J_z^a, J_z^b$ の固有値

$$j_a(j_a + 1), \quad j_b(j_b + 1), \quad m_a, \quad m_b \quad (14.37)$$

第 14 章 回転運動とスピン

を指定すると決まる。これらの値は可換なので同時に指定することができる。この合成系の状態を $|j_a, m_a, j_b, m_b\rangle$ または $|m_a, m_b\rangle$ と表す。或いは J_z^a, J_z^b の代わりに J^2, J_z を与えて $J^2, J_z, (J^a)^2, (J^b)^2$ としても独立な量なので可換であり、固有値が

$$J(J+1), \quad m, \quad j_a(j_a+1), \quad j_b(j_b+1) \quad (14.38)$$

をとる固有状態が存在する。これを $|J, m, j_a, j_b\rangle$ または $|J, m\rangle$ だけで表すこともある。ここで J は整数または半整数, m は $J, J-1, \dots, -J$ の $(2J+1)$ 個のいずれかである。

§14.3.2 二つの状態の合成

例をあげて示す。

$$j_a = 1 \quad \text{と} \quad j_b = \frac{1}{2} \quad (14.39)$$

の 2 つの固有状態の合成を考える。これの z 成分の固有値はそれぞれ

$$m_a = 1, 0, -1, \quad m_b = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad (14.40)$$

である。合成系の z 成分は

$$\begin{aligned} m = m_a + m_b = \frac{3}{2} & \quad \text{でこれは} \quad |m_a, m_b\rangle = |1, \frac{1}{2}\rangle \\ m = m_a + m_b - 1 = \frac{1}{2} & \quad \text{でこれは} \quad |m_a, m_b\rangle = |0, \frac{1}{2}\rangle, |1, -\frac{1}{2}\rangle \\ m = m_a + m_b - 2 = -\frac{1}{2} & \quad \text{でこれは} \quad |m_a, m_b\rangle = |0, -\frac{1}{2}\rangle, |-1, \frac{1}{2}\rangle \\ m = m_a + m_b - 3 = -\frac{3}{2} & \quad \text{でこれは} \quad |m_a, m_b\rangle = |-1, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

であり、これら 6 個の状態をとることができる。それでは、これらはどのような J, m に対応するのだろうか。ここで m の最大値は $3/2$ であるので J の最大値も $3/2$ である。

$J = \frac{3}{2}$ の状態を考える。状態として

$$\begin{aligned} & \left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2} \right\rangle, \left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, \\ & \left| J = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| J = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (14.41)$$

$m = \frac{3}{2}$ の状態は、 $|m_a, m_b\rangle$ の分類では

$$|m_a, m_b\rangle = \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.42)$$

の 1 組だけである。よって

$$\left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2} \right\rangle = \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.43)$$

である。同様にして

$$\left| J = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| -1, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.44)$$

である。

次に、演算子 L_- , L_+ の定義をし、他の状態をつくる。 L_- は m の値を 1 だけ減らす演算子で

$$L_- \psi_{l,m+1} = \hbar a_m \psi_{l,m} \quad (14.45)$$

第 14 章 回転運動とスピン

同様に L_+ は m の値を 1 だけ増やす演算子で

$$L_+ \psi_{l,m} = \hbar b_m \psi_{l,m+1} \quad (14.46)$$

とする。ここで $a_m = b_m^*$ であり

$$|a_m|^2 = l(l+1) - m(m+1), \quad (\text{証明略}) \quad (14.47)$$

である。同様に

$$J_-^a \psi^a(j_a, m_a + 1) = \hbar \sqrt{j_a(j_a + 1) - m_a(m_a + 1)} \psi^a(j_a, m_a) \quad (14.48)$$

$$J_-^b \psi^b(j_b, m_b + 1) = \hbar \sqrt{j_b(j_b + 1) - m_b(m_b + 1)} \psi^b(j_b, m_b) \quad (14.49)$$

である。 $(j_a, m_a) = (1, 0), (j_b, m_b) = (1/2, -1/2)$ の場合 $|m_a + 1, m_b + 1\rangle = |1, 1/2\rangle$ なので (14.48), (14.49) を適用すると

$$\begin{aligned} J_- \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle &= J_-^a \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle + J_-^b \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \hbar \left(\sqrt{1 \cdot (1+1) + 0} \left| 1-1, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} \left| 1, \frac{1}{2} - 1 \right\rangle \right) \\ &= \hbar \left(\sqrt{2} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

である。一方状態 $J = 3/2, m + 1 = 3/2$ に J_- を作用させると

$$\begin{aligned} J_- \left| J = \frac{3}{2}, m + 1 = \frac{3}{2} \right\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \hbar \left(\sqrt{3} \left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

両式が同一の内容を表すので

$$\left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.50)$$

となる。状態 $J = 3/2, m = 1/2$ にさらに J_- を作用させると

$$J_- \left| J = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.51)$$

になる。このようにして

$$J = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \quad (14.52)$$

の4つの状態が得られた。

次に、 $m = \frac{1}{2}$ あるいは $m = -\frac{1}{2}$ の状態は、前の議論で2つずつ存在するので (14.50), (14.51) のほかにさらに存在する。(14.50), (14.51) に直交するものとしてこれを

$$-\sqrt{\frac{1}{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (14.53)$$

第 14 章 回転運動とスピン

にとる。これらの z 成分である m の値はそれぞれ $+1/2, -1/2$ なので、 J の値は $J = 1/2$ になる。よって $j_a = 1, j_b = 1/2$ の合成系は $J = 3/2, J = 1/2$ の状態を 1 つずつ含む^{*2}。

状態 $|j_a, m_a, j_b, m_b\rangle$ と $|J, m, j_a, j_b\rangle$ を結びつける係数

$$\langle j_a, m_a, j_b, m_b | J, m, j_a, j_b \rangle \quad (14.54)$$

をクレブシュ・ゴルダン係数という。ただし、 $m = m_a + m_b$ であって、これは次のように用いる。

$$|J, m, j_a, j_b\rangle = \sum_{m_a, m_b} \langle j_a, m_a, j_b, m_b | J, m, j_a, j_b \rangle |j_a, m_a, j_b, m_b\rangle \quad (14.55)$$

$$C(j_a, m_a, j_b, m_b | Jm) = \langle j_a, m_a, j_b, m_b | J, m, j_a, j_b \rangle \quad (14.56)$$

とおくと $C(j_a, m_a, j_b, m_b | Jm)$ は次式になる。

$$\begin{aligned} C(j_a, m_a, j_b, m_b | Jm) \\ &= \delta_{m_a+m_b, m} \\ &\times \sqrt{\frac{(2J+1)(j_a+j_b-J)!(j_a-m_a)!(j_b-m_b)!(J+m)!(J-m)!}{(j_a+j_b+J+1)!(j_a-j_b+J)!(j_b-j_a+1)!(j_a+m_a)!(j_b+m_b)!}} \\ &\times \sum_{s=0}^{J-m} (-1)^{s+j_a-m_a} \frac{(j_a+m_a+s)!(j_b+J-m_a-s)!}{s!(j_a-m_a-s)!(J-m-s)!(j_b-J+m_a+s)!} \end{aligned}$$

2 つの角運動量 j_a と $1/2$ を合成したときの $C(j_a, m_a, j_b, m_b | Jm)$ を示す。全系の角運動量は $J = j_a \pm 1/2$ になるので表 14.1 になる。特に $j_a = \frac{1}{2}$ の場合は (13.43) 参照。 $j_a = 1$ の場合は表 14.2 に示す。

^{*2} 一般に j_a, j_b から合成される系の J の値は $J = j_a + j_b, j_a + j_b - 1, \dots, |j_a - j_b|$ である。

表 14.1: j_a と $j_b = 1/2$ のときのクレプシュ・ゴルダン係数

	$m_b = \frac{1}{2}$	$m_b = -\frac{1}{2}$
$J = j_a + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_a + m + \frac{1}{2}}{2j_a + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_a - m + \frac{1}{2}}{2j_a + 1}}$
$J = j_a - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_a - m + \frac{1}{2}}{2j_a + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_a + m + \frac{1}{2}}{2j_a + 1}}$

表 14.2: クレプシュ・ゴルダン係数の他の例

$j_a = 1, j_b = 1/2$ のとき

m_a	m_b	J m	$\frac{3}{2}$ $+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ $+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$
+1	$+\frac{1}{2}$		1					
+1	$-\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$			
0	$+\frac{1}{2}$			$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	$-\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
-1	$+\frac{1}{2}$					$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$							1

第 15 章

ゲージ変換とは

物理学で扱う基本的なすべての力がゲージ対称性をもっている。実際の観測量は、波動関数の位相を変えても変わらない。運動の法則は、位相を変える変換を行っても変わらない。ゲージ原理が宇宙の根本原理である。ゲージとは何か、そしてゲージ変換とはどのようなことなのかについて見てみる。

15.1 不変性，対称性

パリティの項で述べたように、右と左の入れ換えに対して「不変」であるとは、左右「対称」であることと同等である。特殊相対論は、直線座標の変換に関して、4次元空間における長さが不変であることに立脚している。アインシュタインは、一般座標変換に対する**不変性**を考慮することによって一般相対性原理に到達した。

理論がある操作に対して**対称性**をもつときには、それに対応した**保存量**がある。これを**ネーターの定理**という。**エミー・ネーター** (E. Nöther) はゲッティンゲン大学でヒルベルトと研究生生活を送り、アインシュタインに影響を与えたが、女性という理由だけで世の偏見を受けた。しかしながら、これに屈することなく、特に抽象代数学という新しい分野を発展させ、理論物理学の最も重要なネーターの定理を導いた。けれども彼女はユダヤ人であるがために、居をア

メリカに移さざるを得なかった人物である。

時間の平行移動に関して変わらない量から、エネルギーの保存則が帰結される（時間の原点の選び方によらない）。同様に、空間の平行移動の対称性からは運動量保存則が得られ、空間回転の対称性からは角運動量保存が得られ、これから取り上げる**大域的（大局的）位相変換**からは電荷の保存側が得られる。

ある量について対称性があるということは、その量についての測定値に関して、確定した値（あるいは特定の値）が得られないことを意味する。たとえば空間の平行移動に関して不変であることは、空間の絶対的な位置は決定できないことを意味している。

波動関数 $\phi(x)$ があるとき、これを

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x) \quad (15.1)$$

となるような変換をしても、観測量は絶対値の 2 乗 $|\phi(x)|^2$ だから、 α は測定できないので、勝手な値に選ぶことができる定数である。この値はいったん決めてしまえば全時間、全空間で定まった 1 つの値になる。(15.1) を**大域的（大局的, global）ゲージ変換**（あるいは歴史的には**第 1 種ゲージ変換**）という。

ゲージ原理についてはすぐ後に述べるが、このゲージ原理こそ、物理学では宇宙の根本原理の一つとなるものである。相対論や量子論と同様に、不変性に関する根本的な原理である。

15.2 ゲージ原理

(15.1) の変換をゲージ変換といったが、なぜこのような位相変換を「ゲージ」変換というのだろうか。

もともと「ゲージ」という言葉が出てきたのは、ワイルが「時空の各点での長さの基準—ゲージを変えても物理法則は変わらない」ことを提唱して以来のことである。これが「**位相**を変えても物理法則は変わらない」こと、すなわち「**位相不変**」ともいうべきところ、歴史的に「ゲージ不変性」という言葉で現在までも転用されて定着している。すなわちゲージ変換とは、場（波動関数）の位相を変えることである。

さて、(15.1) の変換 $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$ に対する不変性は一般的な不変性ではない。 α は時空の各点で違った値をとりうる。すなわち

$$\alpha = \alpha(x) = \alpha(t, \mathbf{r}) \quad (15.2)$$

とすればより一般的になる。したがって

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (15.3)$$

がより一般的な変換である。ここで $\alpha(x)$ の時間・空間の座標依存性はまったく任意である。この変換を**局所ゲージ変換** (local gauge transformation) (あるいは**第 2 種ゲージ変換**) という。法則がこの変換に関して不変であるというのが**局所ゲージ不変性**といわれるものである。

次に、**ゲージ原理**について考えよう。この原理とは「運動の法則は、局所ゲージ変換を行っても形が変わらない」というものである。

局所ゲージ変換では、電荷 q の粒子と相互作用をするベクトル場 $A^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ が存在する。このことが局所ゲージ不変性を成り立たせる条件となっている。相互作用がそのように決まってしまう。この原理によって、自由粒子の波動方程式から、相互作用をしている粒子の波動方程式を得ることができる。

A^μ のように局所位相不変性のために導入されたベクトル場を**ゲージ場**という。

相互作用のパラメータはただ一つで電荷 q しかない。これは電荷 q をもつものが、レプトンであってもクォークであっても原子やイオンであってもよいので普遍的なものである。ゲージ原理がすべての力を支配する宇宙の根本原理である。

次にゲージ変換と群との関係について述べよう。大きさが 1 である複素数 $A = e^{i\alpha}$ の全体 G は、掛け算に関して群をつくる。 $e^{i\alpha}$ の二つの元の積は

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (15.4)$$

で、これも大きさが 1 である複素数の元になっている。また、 $e^0 = 1$ でこれが単位元になっている。 $e^{i\alpha}$ の逆元は $e^{-i\alpha}$ である。

$$A^\dagger A = (e^{i\alpha})^\dagger e^{i\alpha} = e^{-i\alpha} e^{i\alpha} = 1 \quad (15.5)$$

が成り立つので、 G はユニタリー群である。複素数は 1×1 の行列とみなせるので、この群は $U(1)$ になる。次の章で $SU(2) \otimes U(1)$,

正確には

$$\mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y \quad (15.6)$$

(C はカラー, L は左巻き, Y は超電荷 (ハイパー電荷)) といわれるものが標準理論の上で重要になる。

15.3 ラグランジアン

対称性と保存則を議論するためには、**ラグランジアン**を用いる「場の理論」が適している。古典力学では、粒子の運動方程式が**ラグランジュ** (J. Lagrange) **関数** L によって導かれる。

L は一般化した座標 q_i と運動量 $p_i = dq_i/dt = \dot{q}_i$, および時間 t の関数で、系の運動エネルギー T と位置エネルギー V によって

$$L = T - V \quad (15.7)$$

で表され、粒子の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (15.8)$$

であった。

これまで述べたことは、粒子系のようなとびとびの値をもつものだけでなく、連続的に変化する系にも拡張できる。

自然単位系を用いると、一般に、関数 $\phi(x)(x_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3)$ とその微分

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{-\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (15.9)$$

を含む関数 L をラグランジアンといい、それを時間で積分したものを**作用** S という。

また、単位体積あたりのラグランジアンをラグランジアン密度 \mathcal{L} という。すなわち

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} dr dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (15.10)$$

である。ここで $\phi(x)$ はスカラー場、ベクトル場の各成分、スピノール場などの一般の場を表す。今後は \mathcal{L} の代わりにラグランジアン密度を単に L と表す。このラグランジアン密度を用いて、粒子の運動方程式であるオイラー (Euler) 方程式を導いてみよう。

$\phi(x)$ の微小変化 $\delta\phi$ を考える。 $\delta\phi$ を**変分**という。

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (15.11)$$

このときの作用の変化 δS は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta L = \int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi) \right] \end{aligned}$$

関数 $f \cdot g$ の微分 $(f \cdot g)'$ は

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (15.12)$$

であることを利用する。

$$f = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)}, \quad g = \delta\phi \quad (15.13)$$

第 15 章 ゲージ変換とは

に相当するから

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \quad (15.14)$$

が成り立つ。したがって、 δS の第 2 項は

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi \quad (15.15)$$

となるので

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] + \int d^4x \left\{ \frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta\phi \quad (15.16)$$

この式の第 1 項は、微分したものを積分するので [] 内の値で決まるが、境界では $\delta\phi = 0$ とすれば 0 である。変分 $\delta\phi$ があったときに作用が変わらない ($\delta S = 0$) とすると、**オイラー方程式**

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad (15.17)$$

が得られる。

15.4 電荷の保存

大域的位相変換

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad \alpha : \text{定数} \quad (15.18)$$

に対して不変なものがある。これは何であろうか。

作用 $\delta S = 0$ からオイラー方程式が導けたが、 δS の最初の表面積分項に着目する。ここで **4 元カレント** j^μ として

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \quad (15.19)$$

を導入すると、式

$$\int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \quad (15.20)$$

から、ある変分 $\delta \phi$ に対して $\delta S = 0$ 、すなわち作用 S が不変に保たれるならば

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0 \quad (15.21)$$

である。すなわち

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (15.22)$$

となって 4 元カレントが保存する。このとき

$$Q = \int j^0 d^3x \quad (15.23)$$

を定義すると、(15.22) から

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \partial_i j^i = 0 \quad (15.24)$$

すなわち

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} = -\partial_i j^i \quad (15.25)$$

第 15 章 ゲージ変換とは

であるので

$$\frac{dQ}{dt} = \int \frac{dj^0}{dt} d^3x = - \int \partial_i j^i d^3x \quad (15.26)$$

である。法線が i 方向を向いた面の要素を σ_i として、無限遠方で場が十分速くゼロに近づくとする、これはゼロになる。

$$- \int d^2\sigma_i j^i \Big|_{x^i \rightarrow \infty} = 0 \quad (15.27)$$

よって、 Q は時間によらない一定値を取る。 j^μ を電流とみなせば、このときの Q は電荷になる。

このように、物理法則がある変換に対して不変ならば、あるいは、ある変換に対して対称性があるならば、保存量が必ず存在する。ひとつの保存則があるならば、これに伴う対称性が存在する。これがネーターの定理である。自然界での基本的なすべての力は、ゲージ対称性から発しており、対称性とネーターの定理がすべての力を支配しているといっても過言ではない。

大局的位相変換で不変性あるいは対称性があることから、電荷の保存がいえるし、前に述べたように、時間の平行移動の対称性からはエネルギーの保存則が得られる。空間の平行移動の対称性からは運動量の保存則がいえる。

15.5 局所ゲージ変換

大域的位相変換で、位相それ自身は観測量ではないので任意の値を取ることができて、位相不変ということは電荷の保存から要求さ

れることであった。ただし位相変換のパラメータは、いたるところで同じ値の定数であった。地球上で位相角を α だけ変えることは、アンドロメダでも原子のスケールでも到るところで位相を α だけ変換しなければならない。位相が観測量ではないのでこれはきわめて不自然である。もっと一般性のあることは、 α が時空の各点ごとに違った値をとるように、すなわち $\alpha = \alpha(x)$ となるようにすることが自然である。

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (15.28)$$

したがって、 $\alpha(x)$ が実関数のとき、 $\phi(x)$ の複素共役 $\phi^*(x)$ は

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*(x) \quad (15.29)$$

であり、これらを**局所ゲージ変換**という。

ラグランジアンが

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (15.30)$$

である場合を考える。このときの場は**複素スカラー場**といわれる。質量の等しい二つの実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 によるラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 \quad (15.31)$$

と表されるが、

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (15.32)$$

とおけば一つの複素場で表すことができる。

第 15 章 ゲージ変換とは

このラグランジアンに**局所ゲージ変換**を施してみよう。(15.29)なので、(15.30) の第 2 項は不変になっている。しかし ϕ の微分 $\partial_\mu \phi$ は局所ゲージ変換に従わない。すなわち

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \left\{ \partial_\mu \phi(x) + i[\partial_\mu \alpha(x)]\phi(x) \right\} \quad (15.33)$$

と変換されて、 $\partial_\mu \alpha(x)$ が存在するために局所ゲージ変換のもとではラグランジアンは不変ではない。

ここで、たとえば (5.32) で導入した自由粒子に対するシュレーディンガー方程式 ($\hbar = c = 1$)

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (15.34)$$

を考える。上の方程式から局所ゲージ変換

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{i\alpha(\mathbf{r}, t)} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (15.35)$$

で与えられる波動関数 $\psi'(\mathbf{r}, t)$ は、もはや自由粒子のシュレーディンガー方程式を満たさなくなる。これは (15.33) で示されたように、 ∇ も $\partial/\partial t$ も位相因子の中の $\alpha(\mathbf{r}, t)$ に働くからである。したがって、局所ゲージ変換に対する不変性はなくなってしまう。

局所ゲージ変換の不変性を要求するとすれば、自由粒子のシュレーディンガー方程式を修正して、不変性が成り立つようにしてやることである。しかし、この時点ではもはや自由粒子を記述する方程式ではない。自由な荷電粒子の波動関数の位相を変える変換は、何らかの種類の力場を導入し、その場と粒子とが相互作用をして、その場の中で運動するという描像をとらざるを得ない。すなわち局

所的に位相を変えることと、粒子が新しい場の中を運動することとは同値である。

新しい場とはどんなものであろうか。局所的に位相を変えるととはどんなことであるか。それには (15.33) の変化を打ち消さなければならない。ところがこの変換は (15.35) で $\alpha = q\chi$ とおけば、まさに電磁的ゲージ変換 (8.53) および (8.54) と同じ変換である。この故に、自由粒子のシュレーディンガー方程式は

$$\frac{1}{2m} \left(-i\nabla - qA \right)^2 \psi = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right) \psi \quad (15.36)$$

に修正できる。加えて (15.35) を満たすために

$$A \rightarrow A' = A + \frac{1}{q} \nabla \alpha(\mathbf{r}, t), \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{q} \frac{\partial \alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (15.37)$$

と変換されることを要求しなければならない。この結果、 (A, φ) で記述された電磁場と荷電粒子の相互作用を記述するシュレーディンガー方程式となる。

運動方程式が局所ゲージ変換のもとでも不変なものとするためには、運動方程式の中に入ってくる微分 ∂_μ の代わりに、局所ゲージ変換（位相変換）に共変的に変換する新しい微分演算子 D_μ を導入する。すなわち

$$D_\mu \phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi, \quad (D_\mu \phi)^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)} (D_\mu \phi)^* \quad (15.38)$$

とすれば上式 2 つの項の積は不変である。このような D_μ のことを**共変微分**とよぶ。運動方程式が変換に対して形を変えないこと

第 15 章 ゲージ変換とは

を、方程式は**共変**であるという。 D_μ はどのようなものであるのだろうか。

前の $\partial_\mu \phi$ の式の中の不要な項を打ち消すような変換性をもったベクトル場 A_μ を導入する。それは

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu \quad (15.39)$$

であり、 A_μ は共変微分と通常の微分との差を表すものであるが、そのようなベクトル場は**ゲージ場**と呼ばれる^{*1}。 q は定数である。ここで

$$\alpha(x) = q\chi(x) \quad (15.40)$$

とおくと局所ゲージ変換は

$$\phi(x) \rightarrow e^{iq\chi(x)}\phi(x), \quad \partial_\mu \phi(x) \rightarrow e^{iq\chi(x)} \left[\partial_\mu + iq\partial_\mu \chi(x) \right] \phi(x) \quad (15.41)$$

となるが、この変換で

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi(x) \quad (15.42)$$

と変換されるものとすれば、 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ の置き換えによって、 D_μ は $\partial_\mu \chi(x)$ が打ち消しあって

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow e^{iq\chi(x)} D_\mu \phi(x) \quad (15.43)$$

*1 数学的には接続形式という。

となっている。したがって、複素スカラー場におけるラグランジアンは、 ∂_μ を D_μ で置き換えた

$$L = (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (15.44)$$

が局所ゲージ変換に対して不変であるものになっている。ここで導入されたベクトル場は電磁場に等しく、定数 q は粒子の電荷である。

以上の局所対称性を**ゲージ対称性**といい、 α が座標による場合の ϕ, A_μ の変換を**ゲージ変換**という。実定数 q は、場が ϕ である量子の**ゲージ荷電**と呼ばれ、ゲージ場と場 ϕ との間の相互作用の強さを表し、粒子の電荷を表す。

運動方程式は、通常の微分を共変微分で置き換えただけの式

$$D^\mu D_\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (15.45)$$

になる。

ゲージ場も場であるので、その場に対応する粒子が存在する。これが**ゲージボソン**である。上の式はスカラー粒子とゲージボソンの相互作用も表している。

粒子の間の相互作用、すなわち、**電磁相互作用**と**弱い相互作用**を統一した**電弱相互作用**と、もう一つの相互作用である**強い相互作用**は、ゲージ場の理論によって記述される。これが**標準理論**である。

あらゆる実験事実は、この理論に反することがなく、ますますよく一致していくように見える。しかし、この標準理論は依然として決定的理論ではない。18 ものパラメータを含んでいて、最終的な

ものとはなりえない。標準理論を超える実験事実が 1 つでも見つければ、素粒子物理学は急速に発展することは疑いが無い。

15.6 場と運動方程式

スピン 0 の粒子の場 ϕ に対する運動方程式は、新しい微分演算子によってゲージ不変な形として (15.45) と表せた。このときのラグランジアンは (15.44) となった。

ゲージ場を表す実ベクトル A_μ によるゲージ粒子の運動方程式は

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (15.46)$$

において

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (15.47)$$

と表され、 j^ν は電流を表している。またラグランジアンは

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (15.48)$$

であって、2 階の**反対称テンソル** $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ を場の強さという。 $F_{\mu\nu}$ の成分は電場や磁場の成分になる。

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad j_\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A_\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (15.49)$$

としたときには

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15.50)$$

である。

電荷 q のフェルミオンを含むときは

$$j^\mu = ie\Lambda(x) \left[\phi^* D^\mu \phi - (D^\mu \phi)^* \phi \right] + q\Lambda(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi \quad (15.51)$$

と表され、 $\bar{\psi}$ は ψ の複素共役に行と列を入れ換えたものであり、 γ^μ は

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15.52)$$

である。ここで σ^i は (9.14) で与えられるパウリのスピン行列である。

フェルミオンに対するラグランジアンは

$$L = \bar{\psi} i \gamma_\mu D^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (15.53)$$

となり、これを使って運動方程式を求めると

$$\left(i \gamma_\mu (\partial^\mu - i q A^\mu) - m \right) \psi = 0 \quad (15.54)$$

第 15 章 ゲージ変換とは

である。ゲージ不変性から必然的にゲージ粒子との相互作用が生じ、その相互作用は

$$L = qA_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (15.55)$$

である。この式は、伝播してきた光子 A_μ が、電流を作った粒子 ψ に吸収されて相互作用が生じたことになる。

ここで、大層重要なことがある。ゲージ粒子は、ゲージ不変性のために質量が 0 でなければならない。事実、ラグランジアンに質量項

$$L_m = -m^2 A_\mu A^\mu \quad (15.56)$$

を付け加えると、ゲージ変換に対して不変ではなくなる。それであるのに W^\pm や Z^0 などのゲージボソンの質量が 80~90 GeV もあるのは不都合なことではないのか。ゲージ不変性を壊すことなく質量を与えられないか。これが自発的対称性の破れに基づく**ヒッグス機構**である。

15.7 U(1) 対称性

複素場の位相変換について考える。 n 粒子系のハミルトニアンは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で、 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) として

$$H(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m} \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_{ij}) \quad (15.57)$$

と表せた。実スカラー場中の自由な振動子の場合には、このハミルトニアンは一般座標 (p, q) を用いると

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right) \quad (15.58)$$

で与えられる。自由な実スカラー場 ϕ は、振動子の集まりであるから

$$\frac{p^2}{m} \rightarrow \pi^2, \quad m\omega^2 q^2 \rightarrow \phi(\mu^2 + \nabla^2)\phi \quad (15.59)$$

の置き換えで、自由な実スカラー場 ϕ のハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2 \right) \quad (15.60)$$

である。場の相互作用はポテンシャル $V(\phi)$ を用いて

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + V(\phi(x)) \right) \quad (15.61)$$

と表すことができる。 V は

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (15.62)$$

が広く用いられる。第 1 項は場 ϕ の**質量項**で、第 2 項は ϕ の**自己相互作用**を表し、 λ はその結合定数を表す。場の方程式は、自由場の方程式に相互作用項が付け加わり

$$(\square + \mu^2)\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (15.63)$$

第 15 章 ゲージ変換とは

である。

複素スカラー場のハミルトニアンは、実数場の類推から

$$H(\phi, \phi^*) = \int d^3x \left[\dot{\phi}^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + V(\phi, \phi^*) \right] \quad (15.64)$$

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (15.65)$$

で表すことができる。

ヒッグス場 ϕ は複素スカラー場の 1 種であり、ヒッグスポテンシャルの中の λ は自己結合定数である。ヒッグス場はゲージ場と同様にゲージ理論の基本である。

複素場 ϕ の表す粒子の荷電を q としたとき、 ϕ の位相を変える変換

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\alpha} \phi = U\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = \phi^* e^{-iq\alpha} = \phi^* U^\dagger \quad (15.66)$$

を考えると、位相変換 U の全体は群を作る。これが $U(1)$ と呼ばれる群となる。

ハミルトニアンには $\phi^* \phi$ の形で現れるが

$$\phi'^* \phi' = \phi^* e^{-iq\alpha} e^{iq\alpha} \phi = \phi^* \phi \quad (15.67)$$

であるから α が定数ならば

$$H(\phi', \phi'^*) = H(\phi, \phi^*) \quad (15.68)$$

となる。よって、この複素スカラー場の理論は U(1) 対称性をもつ。
したがって

$$[H(\phi, \phi^*), U] = 0 \quad (15.69)$$

であり、電荷は保存する。

このように位相変換に対する不変性から、ヒッグス場についても電荷の保存則が得られる。このほかバリオン数の保存なども位相変換不変性から得られる。

第 16 章

標準理論（電弱統一理論）

素粒子に関する理論の中で、**標準理論**といわれるものが成功をおさめてきた。この理論と食い違う実験事実は今のところはまったくない。それでは標準理論が究極のものであるかというところではない。パラメータの数からも標準理論を超えるものが必ずあり、新しい理論で切り開かれる素粒子の世界が間もなく現れることであろう。この章では、これまでに発展した標準理論について見てみよう。

16.1 標準理論の発展

§16.1.1 発端

1961 年、**グラシウ**が電磁相互作用と弱い相互作用を統一する原型となる理論を提案した。そこではすべてのゲージボソンの質量は 0 としていた。前章で述べたようにゲージ粒子に質量があると、ゲージ不変性が破れてしまうからである。

1967 年に**ワインバーグ**が、1968 年に**サラム**が、ゲージ粒子に質量を与える**ヒッグス機構**を適用して組み上げたのが**電弱理論**、後に**標準理論** (SM-theory)、または、グラシウ以下の名前の頭文字をとって **GWS 理論**といわれるものである。

§16.1.2 弱アイソスピン

陽子と中性子は、質量がほとんど同じで他の量子数が等しく、荷電だけ異なる状態であり、これを識別するためにハイゼンベルグは**アイソスピン**の概念を導入した。同じものの違った状態が 2 つあることをアイソスピンの $1/2$ で、成分（第 3 成分）が $+1/2$ を陽子、 $-1/2$ を中性子とした。

同様なことが (u, d) クォークと (c, s) クォーク、レプトンの $(\nu_e, e^-), (\nu_\mu, \mu^-)$ などに拡張できる。ただし、これらの場合の対称性は弱い相互作用に基づくものなので、**弱アイソスピン**といわれるものによる。この例の組では、スピンのときと同様で、弱アイソスピンの大きさが $I = \frac{1}{2}$ であり、同一粒子の異なった状態を表す第 3 成分 I_3 は $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ である。

パウリのスピン行列 (9.14) は交換関係が

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (16.1)$$

である。 (ijk) が (123) の**偶（奇）置換**のとき

$$\epsilon_{ijk} = +1(-1), \quad \epsilon_{123} = 1 \quad (16.2)$$

であり、 ϵ_{ijk} を**構造定数**という。このように、スピン行列は非可換であった。

一般に、スピンと区別するために、アイソスピンのパウリの行列を τ と表す。交換関係はスピンのときと同じで

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2} \quad (16.3)$$

第 16 章 標準理論（電弱統一理論）

であり、非可換の関係が成り立つ。これに、局所的アイソスピン、および時空による位相変換

$$\psi'(1/2) = \exp \left[i \frac{g}{2} \tau \cdot \alpha(x) \right] \psi(1/2) \quad (16.4)$$

を加えて**非可換局所ゲージ変換**という。電弱理論の場合は τ として**弱アイソスピン**を用いる。すなわち、クォークは 2 つずつ対になって

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

の 3 つのグループで構成されており、レプトンではやはり 2 つずつ対になって

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

の 3 つのグループで構成されており、1 つのグループでニュートリノと荷電レプトンとが対になっている。グループごとの構成粒子数は 2 であるから弱アイソスピンは 1/2 である。

§16.1.3 $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$ とゲージボソン

場が表す粒子の荷電演算子を Q とし、その固有値を q とする。場 ϕ の位相を変える変換は、§15.7 の (15.66) で述べたように

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\alpha} \phi = U_Q(\alpha) \phi \quad (16.7)$$

と表された。位相変換 $U_Q(\alpha)$ の全体は群を作り、 $U(1)$ （ユニタリー群）と呼ばれた。弱い相互作用をする粒子に対応した量子数である（弱）ハイパー電荷を Y とする。このハイパー電荷による位相変換の全体も群を作って $U(1)$ となるので、これを $U(1)_Y$ と表す。

弱アイソスピンを I とし、その第 3 成分を I_3 と表すと、粒子の電荷 Q_e との間には

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (16.8)$$

となるゲルマン・西島の式が成り立つとグラシヨウは考えた。

さらに弱アイソスピンによる変換 (16.4) も考えると、今度は 2 行 2 列の行列になり、 $SU(2)$ 群を構成する。

$U(1)$ と $SU(2)$ は独立であるから、これらの群が互いに独立に不変性を保つことを直積 \otimes で表すと、ハイパー電荷と弱アイソスピンによる位相変換は

$$SU(2) \otimes U(1) \quad (16.9)$$

と表され、この変換に関して**電弱相互作用**は不変である。

通常の電磁気的な電荷と結合するゲージボソンは光子であり、その結合定数は e であった。弱アイソスピンの $1/2$ の粒子に結合するゲージボソンが W ボソンであり、その結合の強さを g とする。ハイパー電荷と結合するゲージボソンを B^0 とし、結合定数は e の代わりに g' と表す。

弱アイソスピンの $1/2$ の対になった粒子に作用するのが W であるが、§10.3.2 で記したように、弱い相互作用は「左巻き粒子」「右

第 16 章 標準理論（電弱統一理論）

巻き反粒子」にしか働かない。これはパリティが 100% 破れていることを表し、理論には最初からこれが組み込まれている。

左巻き粒子（運動方向のスピンまたはヘリシティが $-1/2$ の粒子）に添え字 L をつけて表す。右巻きは R をつけて表す。たとえば、**左巻きニュートリノ**と電子は

$$\nu_L, \quad e_L \quad (16.10)$$

と表記する。

媒介粒子 W は、荷電空間におけるベクトル $\mathbf{W} = (W^1, W^2, W^3)$ で表され、荷電空間において回転対称なラグランジアンは

$$L = g\psi^\dagger \boldsymbol{\tau} \gamma^\mu \psi \cdot \mathbf{W}_\mu \quad (16.11)$$

と表すことができる。 ψ はディラック場の粒子であるクォークまたはレプトンを表す。

ゲージ場 W_μ^i ($i = 1, 2, 3$) は

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm W_\mu^2), \quad W_\mu^0 = W_\mu^3 \quad (16.12)$$

とおく。ゲージ場とフェルミ粒子（物質場）は、電弱統一理論の項で述べる相互作用をする。

弱い相互作用は、弱アイソスピンが $1/2$ の粒子のうち左巻き粒子にしか作用しないので、位相変換群は $SU(2)_L$ と表す。したがって、 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のゲージ不変性を独立に満たしているので、これを

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \quad (16.13)$$

と表す。

16.2 標準理論の粒子

標準理論で扱う粒子は、光子やグルーオン、 W, Z などの媒介粒子、レプトンやクォークなどの物質を作るフェルミ粒子、宇宙誕生時にレプトンやクォークなどに質量を与えた名残の粒子であるヒッグス粒子などがある。ここでは簡単のためにレプトンやクォークは第 1 世代のみを考える（実際上は、**第 2 世代**と**第 3 世代**に対になったクォークとレプトンが存在する）。

電弱統一理論は、媒介粒子であるゲージ場 W_μ, B_μ^0 と、ヒッグス粒子による**複素スカラー場** ϕ 、フェルミ粒子であるクォークとレプトンによるディラック場から構成されている。表 16.1 の添え字 L, R は、それぞれ粒子の左巻き、右巻き成分を表す。また、 ν_R の量子数はすべて 0 であるので、存在しても相互作用がなく、標準理論では、あることさえも議論になっていない粒子である。

表 16.1: 標準理論の粒子

粒子 (場)	弱アイソスピン		ハイパー電荷	電荷	SU(2)
	大きさ	第3成分	Y	(e)	
W	1	1	0	1	3重項
	1	0	0	0	
	1	-1	0	-1	
B^0	0	0	0	0	1重項
ν_L	1/2	1/2	-1	0	2重項
e_L	1/2	-1/2	-1	-1	
u_L	1/2	1/2	1/3	2/3	2重項
d_L	1/2	-1/2	1/3	-1/3	
ν_R	0	0	0	0	1重項
e_R	0	0	-2	-1	1重項
u_R	0	0	4/3	2/3	1重項
d_R	0	0	-2/3	-1/3	1重項
ヒッグス	1/2	1/2	1	1	2重項
(ϕ)	1/2	-1/2	1	0	

16.3 電弱統一理論（標準理論）

電弱統一理論は標準理論ともいい、ゲージ場の粒子である **ゲージボソン** W^1, W^2, W^3, B^0 と、**ヒッグス粒子** による 2 重項 $\phi = (\phi^+, \phi^0)$ （複素スカラー場）、それにフェルミ粒子の場である **クォーク** (q_L, u_R, d_R) と **レプトン** (ℓ_L, e_R) からなる。 W^1, W^2, W^3 は W^+, W^-, W^0 との間に (16.12) の関係がある。

ゲージ場と物質粒子としての場合は、次のような相互作用をする。弱アイソスピン 1/2 の左巻き粒子に結合する W ボソン（結合定数は g ）と、弱いハイパーチャージの保存に結びついた B^0 ボソン（結合定数は g' ）の 2 つの項を含む。運動方程式は $\psi = q_L, \ell_L$ に対して

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= \left(\partial_\mu - ig I_3 W_\mu^3 - ig' \frac{Y}{2} \mathbf{1} B_\mu^0 + \cdots \right) \psi \\ &= \left[\partial_\mu - i \left(g \sin \theta_W I_3 + g' \cos \theta_W \frac{Y}{2} \mathbf{1} \right) A_\mu \right. \\ &\quad \left. - i \left(g \cos \theta_W I_3 - g' \sin \theta_W \frac{Y}{2} \mathbf{1} \right) Z_\mu + \cdots \right] \psi \end{aligned}$$

$\psi = u_R, d_R, e_R$ に対して

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ig \frac{Y}{2} B_\mu^0 \right) \psi \quad (16.14)$$

ただし $\mathbf{1}$ は単位行列である。

以上のモデルでは、すべての粒子の質量は 0 である。ところが質量 0 の粒子は、フェルミオンではニュートリノしかなく、媒介粒子

であるゲージ粒子 W, Z の質量はきわめて大きい。しかも、光子 γ はどこにも存在しない。これはどうしたことであろうか。次にこれを考えよう。

16.4 中性ゲージボソン

すでに §16.2 で述べたように、ゲージ粒子として存在するのは W^+, W^-, W^0, B^0 である。 W^+, W^-, W^0 は弱アイソスピンが 1 で 3 つの状態に相当し、ゲージ不変性の要求から弱い相互作用を記述できた。また、電磁相互作用に関係するのは中性ゲージボソン W^0, B^0 である。2 つとも電荷をもたない中性のボソンで、現実の粒子は同じ中性なので、2 つは「混じり合って」質量の異なる 2 つの粒子になる。これらは、現実の粒子の光子 γ と Z^0 である。電磁力が γ 電磁場ポテンシャル、弱い力が Z^0 によって媒介される。それらの混合は

$$\begin{aligned}\gamma &= W^0 \sin \theta_W + B^0 \cos \theta_W, \\ Z^0 &= W^0 \cos \theta_W - B^0 \sin \theta_W,\end{aligned}$$

で表される。ここで θ_W は**ワインバーグ角**といわれる混合角である。新たに中性なゲージ場 A_μ, Z_μ^0 を使って表すと

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

と書ける。

運動方程式の電荷が中性の部分は

$$igW_\mu^3 I_3 + ig' \frac{Y}{2} B_\mu^0 = iA_\mu \left(g \sin \theta_W I_3 + g' \cos \theta_W \frac{Y}{2} \right) + iZ_\mu^0 \left(g \cos \theta_W I_3 - g' \sin \theta_W \frac{Y}{2} \right) \quad (16.16)$$

である。上式で電磁場 A_μ 項は、ゲルマン・西島の式

$$eQ = e \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right), \quad \left(I_3 = \frac{\tau_3}{2} \right) \quad (16.17)$$

の強さで結合することから電荷になることがわかり、

$$e = g \sin \theta_W, \quad e = g' \cos \theta_W \quad (16.18)$$

と書ける。したがって、

$$g' = \frac{e}{\cos \theta_W}, \quad g = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad (16.19)$$

が得られる。この式を見ると、弱い相互作用の結合定数 g, g' が、電磁相互作用の結合定数 e で表すことができた！すなわち、弱い相互作用と電磁相互作用とは一つのものであり統一されることがわかった。ただし、ワインバーグ角 θ_W は、実験で決定されるパラメータで、真の統一ではない。

弱い相互作用において Z^0 粒子が存在することは、次の図 16.1 に示されるような**中性カレント**が存在する。

これは実験により

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^- \quad (16.20)$$

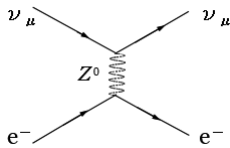


図 16.1: Z^0 による中性カレントの存在

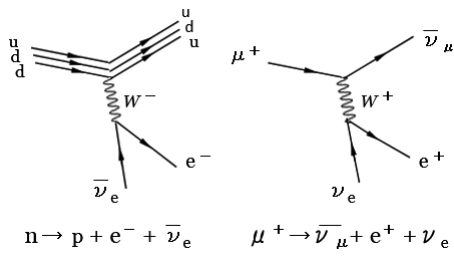


図 16.2: W^-, W^+ による荷電カレント

の反応で、散乱電子があることから示された。これに対して、図 16.2 のような**荷電カレント**といわれるものがある。カレントは電流の意味であるが、弱い相互作用においても W^+, W^- 粒子の媒介による反応がそれである。荷電カレントは W^\pm を吸収したり、放出したりして電荷が 1 だけ変わる反応である。

これがクォークとの反応になると、クォークのフレーバーが変わる。

16.5 対称性の破れ

§16.5.1 大域的対称性の破れ

16.5.1.1 あからさまな対称性の破れ

日常においては、ほぼ対称と見られるが、少し非対称であることがしばしばある。人間は左右対称と思われるが少し違う。日常見られるように、近似的には対称であっても厳密には破れているとき、あからさまに対称性が破れているという。

陽子と中性子は同じ粒子の違った状態であり、アイソスピン対称性（荷電空間における回転対称性）をもつ。しかし、陽子と中性子の質量は 0.1% 程度の違いがあり、同じではない。厳密には対称ではないが、アイソスピンの概念は、強い相互作用によってきわめて有用である。また、弱い相互作用では、 C, P, CP 対称性が破れている。これは標準理論では、あからさまな破れになる。

16.5.1.2 自発的対称性の破れ

理論上は厳密に対称であるが、現実にはその対称性が成り立っていない場合に**自発的な対称性**の破れが起こっているという。すなわちその対称性は**隠された対称性**といってもよい。これは次に述べるように自然な現象である。

図 16.3 に示すように、円周上に一様に人参が置かれていて、その円の中心に一頭の口バがいる。これは対称な世界である。この状態から、口バが人参を食べに行ったとする。円周上のどの人参を食べるかはまったく任意である。一旦、口バが円周に到達して人参を食べれば、これはもとの対称な世界ではなくなる。それが円周のどこかは定められない。このように、対称性の破れた状態はなぜ起こったのであろうか。

今の例のように、円の中心から見て円周上の各点は、連続的に対



図 16.3: 対称な世界 円周上に人参・中央にロバ

称な状態にあり，その中の一つを選んだ途端に対称ではなくなることを**自発的対称性の破れ** (spontaneous symmetry breakdown) という。これは**南部陽一郎**によって提唱されたものである。

電弱理論に最初に登場する粒子は，すべて質量がゼロであった。ところが，現実の粒子は質量をもつので，方程式に質量項を含めると，今度はゲージ変換に対する不変性が成り立たなくなってしまう。§15.6 でゲージ不変な運動方程式

$$(D^\mu D_\mu + m^2)\phi = 0 \quad (16.21)$$

に質量項

$$\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (16.22)$$

を加えてみると，ゲージ不変性が破れてしまう。そこで，ゲージ不変性を壊すことなく質量を与えられないだろうか。自発的対称性の破れにより，真空の対称性を破り，新しい粒子に質量を与えるのが**ヒッグス機構**である。

まず，場として**スカラー場**を考える。スカラー場は真空と同じ量子数をもつ。それはスピンのゼロのボーズ粒子として振る舞う。**ス**

カラーボソンは、自分自身と相互作用をすることができ、自分自身のつくるポテンシャルを感じるができるものとする。

真空はエネルギーが最も低い状態である。すなわち、 $\phi = 0$ が基底状態で、ポテンシャルエネルギーが最も低く、何も特別なことは起こらない。ところが ϕ によるポテンシャルの形が 4 次式の形であったらどうか。

自己相互作用をする**中性スカラー場**を考え、質量項 μ を含めたラグランジアンとして

$$L = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (16.23)$$

とする。このような $V(\phi)$ をヒッグスポテンシャルという。このラグランジアンは、 ϕ を $-\phi$ にする変換に対しては形が変わらない。すなわち対称である。

すでに示した §3.3.4 の図 3.1, 図 3.2 を思い出そう。 $\mu^2 > 0$ のときは図 16.4 (a) で示されるように、ポテンシャルが最小になるのは $\phi = 0$ のときである。 $\mu^2 < 0$ のときは図 16.4 (b) で示されるが、 μ はもはや質量とはいえず、ポテンシャルの形を決めるパラメータであり、質量ゼロのスカラー粒子が $V(\phi)$ のもとで相互作用をする理論になっている。 V の極値を求めると

$$\frac{dV}{d\phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \quad (16.24)$$

より極大値は $\phi = 0$ であり

$$\phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = \pm v \quad (16.25)$$

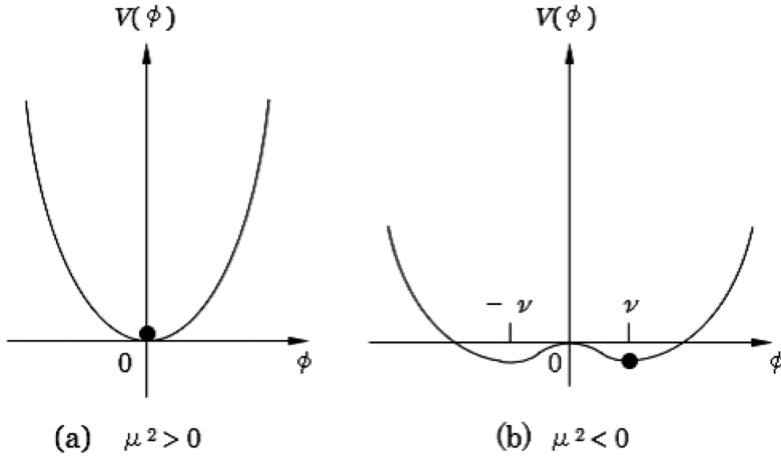


図 16.4: ヒッグスポテンシャル

で極小，すなわち，エネルギーが最小値になる。 $\phi = 0$ の点は不安定な真空である。 $+\nu, -\nu$ の点はエネルギーが最小で，どちらも真空になり得るが，たとえば $\phi = +\nu$ に選ぶ。**真空の期待値**を $\langle \phi \rangle_0$ とすると

$$\langle \phi \rangle_0 = \nu \quad (16.26)$$

である。

素粒子を真空からの励起状態と考えれば，真空からのずれを η として

$$\phi(x) = \nu + \eta(x) \quad (16.27)$$

と表すことができる。 η は真空からどれだけ励起されたかを表す量

である。したがって、ラグランジアンとして

$$L = \frac{1}{2} \partial_\nu \eta \partial^\nu \eta - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \eta^2 - \left[\frac{1}{3} (3\lambda\nu) \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 \right] + \text{定数} \quad (16.28)$$

となる。上式では、 η を $-\eta$ にする変換に対しては η^3 の項があるために不変ではない。

このように、新たに真空を定義し直したためにもとの対称性が破れ、自発的対称性の破れによりその結果として質量が $\sqrt{-2\mu^2}$ の粒子が現れたことになる。ここで自発的対称性の破れの段階で、対称性を破る項を外部から加えることはしておらず、真空を定義しなおしただけである。そのため、もとの対称性が隠されたのである。

これまでは、1つの**スカラーボソン**のみを考えてきたが、今度は2つのスカラーボソンを考える。2つのスカラーボソン ϕ_1, ϕ_2 の代わりに、1つの複素数 ϕ を考えよう。

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (16.29)$$

とする。ラグランジアンとして

$$L = \partial_\nu \phi^* \partial^\nu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (16.30)$$

を考える。

V は二つの実数 ϕ_1, ϕ_2 で表すと

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (16.31)$$

である。 $\mu^2 < 0$ の場合について、 V を示すと図 16.5 になり、これが複素スカラー場の**ヒッグスポテンシャル**になる。あたかもワインボトルの底の形状になる。

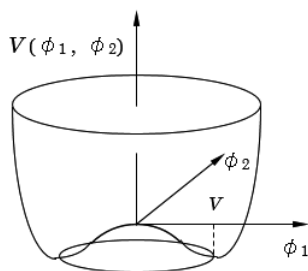


図 16.5: ヒッグスポテンシャル $V(\phi_1, \phi_2)$

ポテンシャルが最小値をとるのは

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \quad (16.32)$$

のときである。真空はボトルの底の円周に沿って無限個ある。

真空として

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.33)$$

すなわち $\phi_1 = v$, $\phi_2 = 0$ を選び、粒子の真空からのずれを η , ρ とすると、 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v + \eta(x) + i\rho(x) \right) \quad (16.34)$$

である。これをラグランジアンのに代入すると

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \partial_\nu \rho \partial^\nu \rho + \frac{1}{2} \partial_\nu \eta \partial^\nu \eta - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \eta^2 \\ & - \lambda v (\eta \rho^2 + \eta^3) - \frac{\lambda}{2} \eta^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 + \text{定数} \end{aligned} \quad (16.35)$$

となる。

基底状態からのずれのうち、 ρ には質量項はなく、質量は 0 である。 η は質量項をもち質量は

$$\sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2} \quad (16.36)$$

である。

質量 0 の粒子は南部・ゴールドストーン (Goldstone) ボソンといわれる。このように連続的な対称性を自発的に破ると、質量 0 の粒子が生じる。これを南部・ゴールドストーン定理という。

なぜ南部・ゴールドストーンボソン が現れるのか。 $\phi(x)$ を次のように書き換えてみる。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x))e^{i\xi(x)/v} \quad (16.37)$$

真空に対する $\phi(x)$ の動径方向のずれが η であり、 ξ はそれと垂直な方位角方向のずれを表している。これを図 16.6 に示す。

図から明らかなように、 η 方向はポテンシャルの谷底にある状態からどちらの方向に向かってもポテンシャルが増加するので、質量すなわち運動の状態の変えにくさは 0 ではなく、質量があることになる。これに対して、 ξ 方向は平らな円周状なのでゼロエネルギーで状態を変えることができるので、質量は 0 である。

§16.5.2 ヒッグス機構

§16.5.1 で述べたように、自発的対称性の破れによって南部・ゴールドストーンボソンが現れる。これは質量が 0 なので無限に遠

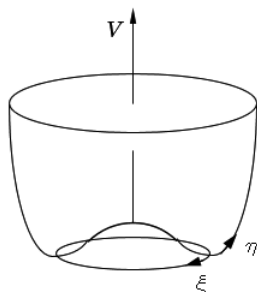


図 16.6: 真空からの ϕ の動径方向のずれを η , 方位角方向のずれを ξ とした図

くまで力を及ぼす。ところが、この種の力は重力と電磁気力があるのみである。したがって、何らかの手段でこれをなくさなければならない。それがヒッグス機構である。

局所ゲージ理論では、質量 0 の粒子は消えて、ゲージボソンが質量をもつことが起きる。ゲージ変換

$$\phi(x) \rightarrow e^{-ig\chi(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x) \quad (16.38)$$

のもとで局所ゲージ不変性を満たすラグランジアンとして §15.7 を参照すれば、(16.31) の V を用いて

$$L = (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (16.39)$$

と表すことができる。ただし $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$ である。ただし、この A_μ は (16.15) の A_μ とは異なる。

$\mu^2 < 0$ のとき、真空を (16.33) に選び、この周りの微小運動を考

える（基底状態から励起された状態＝素粒子）。このときの ϕ は

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)e^{i\xi/v} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + i\xi) \quad (16.40)$$

である。これをラグランジアンに代入して

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \left((\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - 2\mu^2 H^2 \right) + \frac{1}{2} \left((\partial^\mu \xi)(\partial_\mu \xi) \right) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g\nu A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{g^2 \nu^2}{2} A^\mu A_\mu + \cdots \end{aligned}$$

が得られる。 A_μ, ϕ にゲージ変換を行って ξ を消去することを考える。

$$m = g\nu \quad (16.41)$$

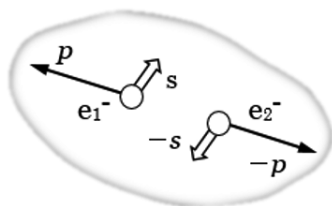
とおくと最終的なラグランジアンは

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \left((\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - 2\mu^2 H^2 \right) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu + gmHA^\mu A_\mu + \frac{1}{2} H^2 A^\mu A_\mu \quad (16.42) \end{aligned}$$

となり、ゲージボソン A_μ はスピンの 1 で質量 $m = g\nu$ をもち、スピンの 0 で質量が $\sqrt{2|\mu^2|}$ のヒッグス粒子（スカラー粒子） H も存在する。

このように、局所ゲージ不変性を考慮し、これの自発的対称性の破れによってベクトル粒子に質量をもたせるメカニズムを**ヒッグス機構**という。

凝縮したヒッグス粒子があり、その中を進む質量 0 の粒子が、ヒッグス粒子による抵抗を受け、もはや光速であることはできず、



電子のクーパー対

図 16.7: 超伝導体中の電子はクーパー対をつくって整列し、ボース粒子になる。

光速より遅い速さになってしまう。これは粒子が質量をもつことに相当する。

§16.5.3 質量 0 の粒子が質量をもつ例

超伝導状態にはマイスナー (Meisner) 効果といわれるものがある。磁場は超伝導体の中にはほとんど入り込むことができないというものである。超伝導体中の電子はクーパー対を作って整列する。図 16.7 に示すように、**クーパー対**は 2 つの電子のスピンと運動量が逆向きで、この対はボース粒子として振る舞う。

図 16.8 に示すように、真空中で磁束密度 B の磁場が、超伝導体中では $Be^{-\lambda x}$ に減衰する。ただし、 x は超伝導体の表面からの距離であり

$$\lambda = \sqrt{\frac{e^{*2}n\mu}{m^*c^2}}, \quad e^* = -2e, \quad m^* = 2m \quad (16.43)$$

は有効電荷、有効質量、 n はクーパー対の密度である。クーパー対の凝縮によって、減衰定数 λ で磁束密度が超伝導体に侵入する。

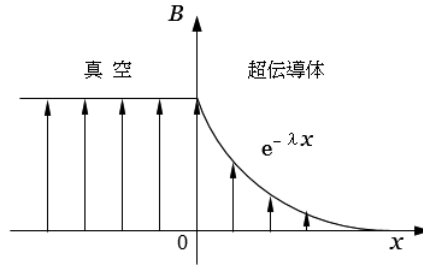


図 16.8: 超伝導体中で磁束密度が $e^{-\lambda x}$ に減少

クーパー対の電磁場中の運動のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m^*} \left(p - \frac{e^*}{c} A \right)^2 \quad (16.44)$$

であり，クーパー対の速度は

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m^*} \left(p - \frac{e^*}{c} A \right) \quad (16.45)$$

である。このときのクーパー対による電流密度は，対ごとの和 \sum_i をとって

$$j = e^* \sum_i v_i = \frac{e^*}{m^*} \sum_i p_i - \frac{e^{*2}}{m^* c} n A \quad (16.46)$$

であり，クーパー対が**ボーズ・アインシュタイン凝縮**を起こしているので運動量は 0 であり，上式の第 1 項が消える。また，マクスウェルの方程式で $E = 0$ として，超伝導体の式

$$\text{rot } H = \frac{j}{c} = -\frac{e^{*2} n}{m^* c^2} A \quad (16.47)$$

第 16 章 標準理論（電弱統一理論）

が得られる。

超伝導体中の磁束密度の満たすべき式を考えよう。ガウス有理化単位系でのマクスウェルの方程式は、次の式で与えられる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \quad (16.48)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (16.49)$$

第 2 式の回転をとる。

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{e^{*2} n}{m^* c^2} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (16.50)$$

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} と磁束密度 \mathbf{B} の関係は

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (16.51)$$

であったので

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \lambda^2 \mathbf{B} \quad (16.52)$$

が成り立つ。

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} \quad (16.53)$$

となるので

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = -\lambda^2 \mathbf{B} \quad (16.54)$$

を得る。

この式の平面波解

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)/\hbar} \quad (16.55)$$

を代入すると

$$\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\epsilon\mu}{c^2} i^2 E^2 - i^2 p^2 \right) = -\lambda^2 \quad (16.56)$$

が得られ、**ボーズ・アインシュタイン凝縮**により $p^2 = 0$ であり、

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (16.57)$$

は媒質中の光の速さであるので

$$E = \hbar\lambda \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (16.58)$$

になる。よって超伝導体中の光子の質量 m は

$$mc^2 = \frac{\hbar\lambda c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (16.59)$$

$$\therefore m = \frac{\hbar\lambda}{c\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{ne^*2}{m^*c^2\epsilon}} \quad (16.60)$$

となって、超伝導体中の光子は質量をもつことになる。

話を**ウィークボソン**の場合にもっていく。ここで逆に、本来質量 0 のウィークボソンが現在のような質量をもつようになった理由を考察しよう。

真空は、宇宙の媒質としてのヒッグス場の中でヒッグス粒子が凝縮しているのがその姿であるとする。現在の宇宙温度は 2.7 K で、十分な凝縮温度になる。弱荷をもつ粒子をヒッグス場中に置くと、 $m_0 = 0$ のウィークボソンが放出される。ところが、§3.3.4 でふれたように、至るところでヒッグス場と相互作用し、粒子の進行方向とは逆方向に抵抗力を受け、力は湯川型で指数関数的に減少してしまう。この力は

$$F = \frac{g_a g_b}{r^2} e^{-mcr/\hbar} \quad (16.61)$$

と書くことができる。ただし、 m は媒介粒子の質量であり、 $g_a g_b$ は力の発生源とそれを感じるものの荷量である。この場合のように、 $m_0 = 0$ の粒子が質量をもった例である。すなわち、ヒッグス粒子と相互作用をする W^\pm, Z^0 粒子が質量を生じたことになる。宇宙（真空）を満たすヒッグス場の、いわば**シールド効果**によって短距離力になり、これが弱い力である。自発的に真空の対称性が破れて**相転移**が起こり、質量の発生が生じた。

このように、物性分野の現象であるマイスナー効果は、素粒子の分野でも大事な役割を果たすことになった。

第 17 章

標準理論に続くもの

標準理論は、これまでの実験結果を見事に説明した。しかしながら、この理論は不完全なものであることを誰しもが認めている。これを抜け出すためのいくつかの試みがあるので、それらを紹介しよう。

17.1 大統一理論

強い力、電磁力、弱い力を統一した理論は、**大統一理論** (Grand Unified Theory; GUT) と呼ばれる。アインシュタインは、電磁力と重力とを統一しようとしたが、成功はしなかった。

1967～1968 年、ワインバーグとサラムによって電磁力と弱い力が統一され、これが**標準理論**であった (§16)。さらに、強い力も含めて 3 つの力を統一的に扱う大統一理論へと発展していった。

この理論では、3 つの力が 1 つのものになるエネルギーが、ほぼ 10^{16} GeV であるとされ、ある媒介粒子の働きで、クォークとレプトンが相互に移り変わることができる。その媒介粒子は X, Y およびその反粒子 \bar{X}, \bar{Y} である。これらの媒介粒子と第 1 世代のクォーク・レプトンの関係例を示す (第 2 世代、第 3 世代も同様)。

第 17 章 標準理論に続くもの

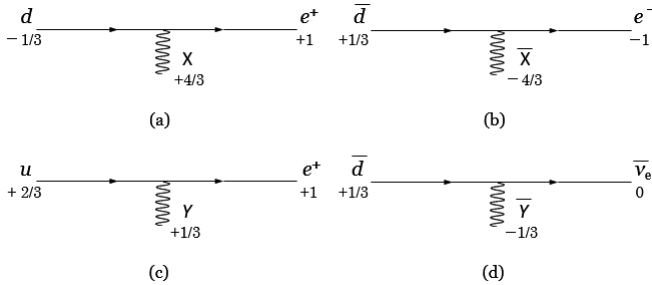


図 17.1: X, Y, \bar{X}, \bar{Y} 粒子の電荷

クォークのカラーを省略して記述すると、

$$d + X \rightarrow e^+, \quad u + Y \rightarrow e^+, \quad \bar{d} + \bar{X} \rightarrow e^-, \quad \bar{d} + \bar{Y} \rightarrow \bar{\nu}_e \quad (17.1)$$

などである。

次に、 X 粒子の荷電を見てみよう。 $d + X \rightarrow e^+$ であったので、これに対するファインマン図は、図 17.1(a) のようになる。 d の電荷は $-e/3$ であり、 e^+ は $1e$ である。したがって、 X 粒子の電荷は $+4e/3$ となる。同図 (b), (c), (d) も同様に、 \bar{X}, Y, \bar{Y} の電荷は、 e を単位にして $-4/3, 1/3, -1/3$ になる。粒子の質量は、 10^{16} GeV 程度と考えられている。

このように、クォークがレプトンに、あるいはレプトンがクォークに変わることができることは、重粒子数や軽粒子数の保存則が成り立たなくなることを意味する。これまでは、陽子の質量は、陽電子の質量より十分大きいので、陽子が陽電子に崩壊することは可能であった。しかし、現実には崩壊しなかったのは、重粒子数、あるいは軽粒子数が保存するという事実によってであった。陽子が陽

電子と中性パイ中間子に崩壊する反応は

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \quad (17.2)$$

であり、この式の左辺は、陽子のみで重粒子数は 1 であり、右辺には重粒子が 1 つも含まれていないから重粒子数は 0 である。よって、このような崩壊は起こらないのが定説であった。ところが、大統一理論は、クォークがレプトンに変われることを理論の中に含んでいて、重粒子数などの保存はもはや成り立たない。それに代わるものが**フェルミオン数の保存**である。クォークとレプトンには**フェルミオン数**が与えられ、1 個の粒子は +1、反粒子に対しては -1 である。この数の保存は、フェルミオンがフェルミオン以外のものになることを阻止している。

17.2 陽子は崩壊するか

X 粒子の出現以前は、最も軽い重粒子である陽子は、重粒子数の保存のため、崩壊して別の粒子になることはできないとされてきた。ところが、大統一理論により、クォークはレプトンに変われるので、クォークの集合体である陽子も崩壊する可能性が生じ、**陽子崩壊**の実験がなされてきた。

大統一理論から予言されている (cf. 式 (17.2)) 崩壊するときの寿命 τ_p の下限値の実験がある。その 1 つは**スーパーカミオカンデ**測定器による実験である。スーパーカミオカンデは、岐阜県**神岡鉱山**跡地に作られた地下 1000 m にある測定器である。内部に純水 5 万トンを蓄え、直径 50 cm の光電子増倍管 11000 本を周囲に配し、

第 17 章 標準理論に続くもの

水中で発光するチェレンコフ光を観測している。上の反応では、 e^+ がチェレンコフ光を発生するので、これを検出する。実験値は

$$\tau_p > 10^{33} \text{年} \quad (17.3)$$

であり、初期の大統一理論の予想値 6.6×10^{28} 年より遥かに長く、1985 年にこの大統一理論は否定された。その後、理論が修正されて 10^{33} 年から 10^{35} 年程度になった。さらに、**超対称 (SUSY; super symmetry) 大統一理論**では、

$$\tau \approx 10^{38 \pm 2} \text{年} \quad (17.4)$$

となっているが、これは実験可能な値からはほど遠い値である。

陽子の寿命を調べるのに、次のような理由で 10^{33} 年も待つ必要はない。寿命 τ_p の粒子が N_0 個あり、これが時間 t の間に崩壊する個数 N は

$$N = N_0(1 - e^{-t/\tau_p}) \quad (17.5)$$

で表される。経過時間 t が小さいところでは

$$N \sim \frac{N_0}{\tau_p} t \quad (17.6)$$

であるので、陽子の数 N_0 が多ければ、寿命 τ_p が長くとも崩壊する数が大きくなって、観測可能である。スーパーカミオカンデでは、純水中の陽子が 7.5×10^{33} 個である。したがって、寿命が 10^{33} 年としたときには年間 7~8 個の崩壊事象が見られることになる。こ

れまでは、陽子の崩壊イベントは見つかっていないが、数 10 年かければ、陽子の寿命が 10^{34} 年までの下限値がわかる。

17.3 大統一エネルギー

GUT の立場から相互作用の結合定数を見てみよう。§11.3.4 で示したように、電磁相互作用は、2 つの粒子の距離が短くなると強くなり、強い力は距離が接近すると非常に弱くなり、いわゆる漸近的自由の状態になる。同様な議論を弱い力に対して行えば、この力は接近するほど強い力になる。強い力が弱くなり、弱い力が強くなり、非常な近距離でこれらの力は交わることが予想される。

まず、3 つの相互作用（強い、弱い、電磁相互作用）のまとめをしておこう。

強い相互作用は、SU(3) 群で表現できる。赤 (R)、緑 (G)、青 (B) の 3 色カラー荷をもち、これのやり取りで力が働く。力を媒介するゲージボソンは 8 種類のグルーオンで、SU(3) が最もよく成り立っている所以その質量は 0 であり、結合定数は α_s である。

弱い相互作用は、SU(2) 群に属し、左巻き粒子のみに働く。ゲージボソンは W^+, W^-, W^0 であり、粒子の弱アイソスピンに作用する。結合定数は g であり、これはワインバーグ角を θ_W として $g = e/\sin \theta_W$ と表すことができる。 e は電気素量であり、ここにおいて、弱い力は電磁力と根は同じものであることが明らかになった。

電磁相互作用は、U(1) で表され、ゲージボソンは B^0 である。 B^0 ボソンと W^0 ボソンは共に中性粒子なので、§16.4 節で述べたよう

第 17 章 標準理論に続くもの

に混合して γ と Z^0 になる。ゲージボソンは B^0 ボソンであり、ハイパー電荷に働く。結合定数 g' は $g' = e/\cos \theta_W$ により混合角を通してここでも電荷を表す量 e と密接な関係がある。

$SU(3) \otimes S(2) \otimes U(1)$ の不変性の上に成り立っているものが標準理論であった。結合定数を大統一理論で扱う関係上、次のような置き換えをする。 $U(1), SU(2), SU(3)$ 群の結合定数を g_1, g_2, g_3 と置き、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用の結合定数を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とする。 α_i と g_i との関係は

$$\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (17.7)$$

である。ここで、 α_i はエネルギースケール μ に依存し、その逆数は

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}(M_X)} - \beta_i \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \dots \quad (17.8)$$

と場の摂動論から求められ、後で述べる超対称性理論を含めて、2 次の項までとると、上式の $+\dots$ が降がなくなる。 β_i はゲージボソンの自己エネルギーに関する係数である。上式の第 2 項は $\mu = M_X$ のとき 0 になって、すべての結合定数が等しくなる。すなわち、エネルギースケールに対する α_i^{-1} が図 17.2 で示されるように 1 点で交わる。

このエネルギーを大統一エネルギーといい、値は $10^{15} \sim 10^{16}$ GeV である。あるいは 10^{-31} m もの近距離では、重力を除くすべての力は同じ大きさになると表してもよい。

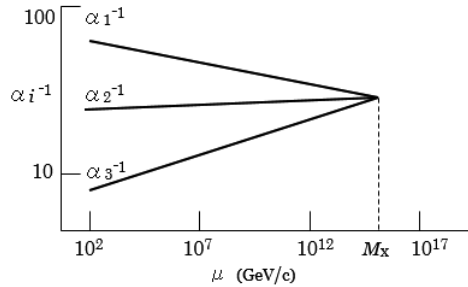


図 17.2: 3 つの結合定数 α_i のエネルギー依存性。大統一エネルギーで値が一致する。

大統一理論は、そこで扱うエネルギーが 10^{16} GeV ととても大きく大きい。そこに登場する粒子を、どのような力学に当てはめて取り扱ったらよいかもまだ知らない。標準理論を越える理論もまだ生まれていない。

17.4 階層性の問題

自然界は多くの階層構造をなし、各階層にはその階層特有の法則があることを §1.2 で示した。現在の実存する素粒子の振る舞いは、標準理論によって示すことができる。しかし、非常によくできた理論ではあるけれども、究極のものではない。たとえば、素粒子の質量そのものをずばり指し示すものにはなっていない。

標準理論には**階層 (hierarchy) 問題**がある。**ヒッグス粒子**の質量について考えてみる。ヒッグス粒子の質量は、標準理論の枠内で議論することさえできないが、理論が意味をもつ極限值である、**ユニ**

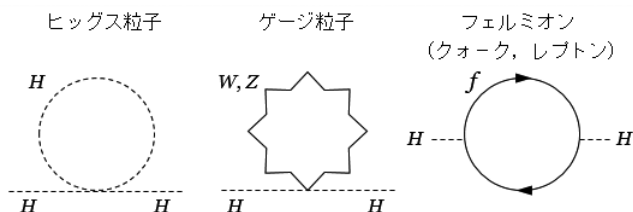


図 17.3: 輻射補正の粒子

タリー極限を超えないということはいえる。ユニタリー極限值は、ほぼ 1 TeV である。

一般に、ある粒子を輻射し、再びこの粒子を吸収する過程は、量子論から許されるものでよく知られている現象である。輻射・吸収される粒子のエネルギーが Λ 以下であったとき、ヒッグス粒子の質量は

$$\delta m_H^2 = C g^2 \Lambda^2 \quad (17.9)$$

の輻射補正を受ける。ただし、 δm_H は補正量、 g は結合定数、 C は定数である。輻射・吸収される粒子は図 17.3 に示されるように、ヒッグス粒子 H 、 W, Z のゲージ粒子、クォーク、レプトンのフェルミオン f である。

これらの粒子の輻射・吸収過程は、明らかにエネルギーの保存則を破るが、不確定性原理により短い時間 Δt ならば $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$ のエネルギー増加があってもよい。ところが、ヒッグス粒子の輻射補正量は Λ^2 の形で 2 次の発散項である。 Λ を無限大にすると補正量も無限大になる。これを 2 次発散という。このことは、標準理論に適用限界があることを示している。すなわち、標準理論は、より究

極の理論の低エネルギー近似理論であり、エネルギー領域が1つの特定な階層で成り立つ理論である。

現実のヒッグス粒子の質量 m_H は、エネルギースケール Λ で計算されて、 m_H よりはるかに大きい裸の質量 $m_H(\Lambda)$ と、これも m_H よりはるかに大きい輻射補正項により

$$m_H = m_H(\Lambda) - \delta m_H \quad (17.10)$$

として表される $m_H(\Lambda)$ と δm_H が打ち消しあった結果としてのものである。 Λ が GUT エネルギーで、ヒッグス粒子の質量が 1 TeV 程度になるためには、20 数桁以上が打ち消し合わなければならない。これはたいそう不自然なことである。補正量が元の物理量を大きく変えないことが自然な理論になる。ヒッグス粒子の質量に対する不自然さ、あるいはヒッグス粒子の質量に発した階層性の問題は、ヒッグス粒子の質量に対する補正項が 2 次発散であるために発生した。これを解決するのが次に述べる超対称性理論である。

17.5 超対称性理論

超対称性 (super symmetry; SUSY) 理論では、すべての粒子にスピンが 1/2 だけ異なる粒子があり、スピンが半奇数のフェルミ粒子とスピンが整数のボーズ粒子が対称に存在する。超対称粒子は、現実の粒子と質量、電荷などが等しい粒子で、現存する粒子がフェルミ粒子の場合には、**超対称粒子**はボーズ粒子であり、ボーズ粒子の場合には、超対称粒子はフェルミ粒子であって、必ずペアで存在することが前提になっている。超対称粒子が相互作用するときの結

表 17.1: 代表的な超対称性粒子の一覧

超対称性粒子 (名称)	対応する基本粒子
ボシーノ (bosino) ゲージノ (gaugino) ・ フォティーノ (photino) ・ グルイーノ (gluino) ・ ウィーノ (wino) ・ ジーノ (zino) ・ グラビティーノ (gravitino) ヒッグシーノ (higgsino) アクシーノ (axino)	ボソン ゲージ粒子 ・ 光子 ・ グルーオン ・ W ボソン ・ Z ボソン ・ 重力子 ヒッグス粒子 アクシオン
スフェルミオン (sfemion) スクォーク (squark) ・ sup,sdown,sstrange,scharm,sbottom,stop スレプトン (slepton) ・ セレクトロン (selectron) ・ スミューオン (smuon) ・ スタウ (stau) ・ スニュートリノ (sneutrino) ・ e-sneutrino, μ -sneutrino,t-sneutrino	フェルミオン クォーク ・ アップ,..., トップ レプトン ・ 電子 ・ ミューオン ・ タウオン ・ ニュートリノ ・ 電子ニュートリノ,...

合定数は、ペアになった元の粒子の結合定数と等しい。

輻射補正は、フェルミ粒子とボーズ粒子の対で考えると、その寄与は互いに異符号で完全に打ち消し合うという特徴をもっている。したがって、ヒッグス粒子の質量に対する補正が2次発散であるために発生した困難はなくなる。

基本粒子に対する超対称性粒子の一覧表を表 17.1 に示す。超対称性粒子の記号は、対応する基本粒子の記号の上にチルダをつける(例： $\tilde{v}, \tilde{e}, \tilde{q}, \tilde{\gamma}, \tilde{W}, \tilde{Z}, \tilde{H}$ など)。

すべての粒子にはスピンが異なるだけで、その他の量子数が等しいパートナー、超対称性粒子があることになっているが、現実的

にはこの対称性は明らかに破れているので、質量も異なることになる。

超対称フェルミオンで中性のものをニュートラリーノ (neutralino)、電荷をもつものをチャージーノ (chargino) という。このうちニュートラリーノは、電荷をもっていないので物質との相互作用が小さいことが予想される。宇宙に多量にあっても観測にはかかりにくい。最近の観測によると、宇宙の物質の総量のうち、通常の原子によるものが約 4%しかなくて、大部分はいまだに観測されていない暗黒物質や暗黒エネルギーが 96%も占めるといわれ、これがニュートラリーノになるのではないかともいわれている。真偽のほどは不明である。物質の大部分が知られていないものであるということは驚くべきことである。

§17.5.1 暗黒物質

暗黒物質の存在の根拠として、1つの例を挙げてみよう。銀河系の構造については、第1章の図 1.10 に示したように、星が沢山集まっているバルジの外側に、半径 7.5 万光年のハローが広がっていることを示した（ハローの大きさは半径 13~20 万光年程度とする見方もある）。このハローの部分に、圧倒的に多量な「光らない物質、ダークマター (dark matter)」があるというのである。銀河の内外において、水素原子の銀河中心に対する回転する速さ v は、銀河中心からの距離 r が大きくなると、ほとんど一定の値になるという観測結果がある。

物体の速さを観測するために、中性水素原子のスペクトルを利用する。中性水素原子の相対的な速さは、中性水素原子から放射され

る電磁波のドップラーシフトを利用して測られる。中性水素原子は、陽子 1 個と電子 1 個から成り立っていて、陽子も電子もスピンの $1/2$ の粒子である。両者のスピンの平行であるか、反平行であるかのどちらかであるが、陽子と電子のスピンの平行である水素原子の方が、反平行である水素原子よりもエネルギーがわずかに大きい。したがって、水素原子の基底状態が 2 つに分かれて超微細構造になり、2 つのエネルギーに分裂している。2 つの準位間の遷移確率はきわめて小さく、1 個の水素原子につき遷移が起こる時間は 10^7 年の長さになるが、莫大な数の星間物質の中性水素原子なら、この遷移のスペクトルを観測することができる。このスペクトル線は波長が 21 cm の電波である（正確には波長が 21.106 114 cm，周波数が 1420.405 75 MHz，通称 **21 cm 線**）。放射される電波は、2 つの準位間の遷移が極めて長い寿命をもっているため、スペクトル線の自然幅は極端に狭い。したがって、観測する電磁波のスペクトル線の幅は、線源の観測者に対する運動によるドップラーシフトに基づくものである。21 cm 線は、周波数が「電波の窓」といわれるものに属し、地上で観測する際に減衰が極めて少ない電波である。

水素原子の質量を m とし、半径 r の球状内の部分に含まれる質量を $M(r)$ とする。水素原子の回転運動による遠心力と万有引力の釣り合いの式

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM(r)}{r^2} \quad \text{から} \quad M(r) = \frac{rv^2}{G} \quad (17.11)$$

である。 r が大きいところでは v が一定となっているので、質量 $M(r)$ は r に比例する。 r を大きくしていくと、 v がある値から一定になって、銀河系の場合、銀河系の半径の約 10 倍の距離までも

一定である。したがって、質量 $M(r)$ もどんどん大きなものになる。これまでは光らないので、ほとんど空虚な空間と思われていたのが、実際には暗黒物質で満たされていたことになる。宇宙も同じことがいえる。

暗黒物質とは何だろうか。それは電氣的には中性でなければならない。さらに、弱い相互作用しかしないものである (**WIMP**; **weakly interacting massive particle**)。その候補は、1 つには**ビッグバン**直後に生成された大量のニュートリノの可能性、2 つには超対称粒子である**ニュートラリーノ**の可能性があり、それとは別に**アクシオン** (axion) という粒子の可能性などが考えられる。アクシオンは強い力の量子色力学に登場し、質量が電子の 1 億分の 1 以下の粒子とされている。これらの粒子を検出しようとするさまざまな実験が進められている。暗黒物質の正体は何だろうか。

以上見てきたように、素粒子の世界は、玉ねぎの皮をはぐように、次々と新しい面が出現して、興味の尽きないものをもっている。大型加速器の稼動に伴い、新しい素粒子物理学が拓けていくことであろう。

用語索引

- Ψ メソン, 268
 Υ (アップシロン) , 281
 Υ' (アップシロン・プライム) , 281
1 重項, 248
2-jet イベント, 294
21 cm 線, 402
2 成分スピノル, 192
3 K 背景輻射, 328
3 グルーオン結合, 258, 259
3 重項, 253
4 元
 —運動量 p^μ , 100
 —カレント, 353
 —電流密度, 94, 189
 —ポテンシャル, 188
 —ベクトル, 85
4 元速度, 99
4 元ベクトルの成分, 92
4 次元座標, 94
4 重極電磁石, 168
4 成分スピノル, 202
8 重項, 235, 248
10 重項, 248

AGS, 165
ALEPH グループ, 301
AMY グループ, 283

B ファクトリー, 325

CERN, 60
CP
 —の破れ, 291
 —不変性の破れ, 223, 325
 —変換, 220
CPT 定理, 210
CPT 変換, 210
C 変換, 209, 219, 320

DORIS 検出器, 281
DO グループ, 283

eV, 46

FM サイクロトロン, 152

GIM 機構, 270
GWS 理論, 270, 296, 366

 J メソン (J/Ψ メソン), 268

KEK (高エネルギー加速器機構) ,
 136, 325

LC 共振, 161
LEP 加速器, 283
LHC, 56

MeV, 9, 47

OZI 則 (大久保 - ツバイク - 飯塚
 規則) , 275

- Perl(SLAC), 290
- P 変換, 210, 211
- QCD (量子色力学), 38, 69, 254, 259, 275
- QED (量子電磁力学), 36, 254, 259
- R , 295
 - 比, 288
- running coupling constant, 278, 302
- SLAC, 271
- SUSY, 399
- TOPAZ グループ, 283
- TRISTAN 加速器, 282
- T 変換, 210, 225
- $U(1)$ 対称性, 362
- VENUS 測定器, 282
- W, Z ボソン, 28, 40, 56, 297
- WIMP, 403
- アイソスピン, 61, 231, 315, 367
 - 行列, 318
- アクシオン, 403
- 泡箱, 140
 - 写真, 136, 137
- 暗黒エネルギー, 401
- 暗黒物質, 401
- アンペールの法則, 181
- イオン結合, 8
- 位相, 63, 150, 158, 348
 - 安定の原理, 157
 - 変換, 63
- 因果律, 91
- ウィークボソン, 13, 28, 67, 389
- 運動エネルギー, 100
- ヴァンデグラフ型, 146
- エネルギーの保存則, 32
- エマルジョン (写真乳剤), 132, 140
- エルミット量, 242
- 演算子 (オペレーター), 237
- オイラー方程式, 352
- 回折, 122
- 階層構造, 4, 14
- 階層問題, 397
- 回転, 178
 - 運動, 330
 - 演算子, 337
 - 群, 235
 - 座標系, 238
 - 周波数, 149
 - 無限小—, 240
- カイラル対称性, 68
- 香り (flavor), 252
- 角運動量, 191, 194, 235
 - 軌道—, 330, 336
 - 全—, 338
 - 内部—, 191
 - 内部回転の—, 335
 - の合成, 338
- 隠された対称性, 377
- 核子, 9, 36, 58, 212, 316
- 核分裂, 22
- 核融合反応, 23
- 核力, 22, 30, 212
 - のポテンシャル, 32
- カシミール演算子, 242
- 仮想光子, 283
- 仮想粒子, 212

用語索引

- 加速器, 141, 145
- 加速空洞, 158
- 加速原理, 141
- 加速電圧, 143
- 荷電, 9
 - カレント, 376
 - 共役, 219
 - 共役変換, 209
 - スピン (アイソスピン), 231
 - 多重項 (charge multiplet), 317
 - 粒子, 25, 127
 - レプトン, 13
- 神岡鉱山, 2, 393
- カラー
 - 因子, 255, 261
 - 荷, 36, 252, 260
- 慣性系, 72
- 慣性の法則, 72
- ガイガー計数管, 131, 139
- ガウスの法則, 181
- ガリレイの相対性原理, 72
- ガリレイ変換, 71, 74
- 規格化定数, 207
- 期待値, 115
- 既約表現, 233
- 強荷, 28
- 強集束
 - 型, 155
 - シンクロトロン, 165
 - の原理, 155, 165
- 共変, 358
- 共変微分, 357
- 共変ベクトル, 97
 - 演算子, 180
- 共鳴状態, 273
- 共鳴粒子, 57, 59
- 共有結合, 7
- 局所ゲージ不変性, 348
- 局所ゲージ変換, 64, 348, 354, 355, 356
- 霧箱, 140
- 擬スカラーメソン, 245
- 銀河
 - 天の川—, 15
 - 渦巻き—, 15
 - 群, 16
 - 系, 15
 - 団, 16
- 空間的, 91
- 空間反転, 210
- 空気シャワー, 134
- 空洞共振器, 144, 164, 168
- クォーク, 11, 13, 22, 36, 56, 234, 234, 373
 - b —, 11, 56, 281
 - c —, 11, 56, 270
 - d —, 11, 56
 - s —, 11, 56
 - t —, 11, 56, 282
 - u —, 11, 56
 - 反クォーク対凝縮, 69
 - モデル, 233
- クォークスープ, 18
- クライストロン, 168
- クライン・ゴールドン方程式, 117, 197, 305
- くりこみ理論 (renormalization), 302
- クレプシュ・ゴールドン係数, 244, 321, 344
- クーパー対, 69, 386
- クーロン

- 条件, 184
- の法則, 24
- 力, 25
- ゲージ, 183
- 偶 (奇) 置換, 367
- グラヴィトン, 56
- グリーン関数, 184
- グルーオン, 13, 28, 36, 56, 234, 253
- 群, 235
- 計量テンソル, 97
- ケットベクトル記号, 221
- ゲルマン・西島の式, 232
- 原子, 6
- 原子核, 9
- 原子番号, 10
- 原子力, 23
- 元素, 6
- ゲージ
 - 荷電, 359
 - 原理, 63, 348, 349
 - 対称性, 359
 - の凍結, 183
 - 場, 70, 349, 358
 - 不変性, 182, 189, 362
 - 変換, 182, 184, 346, 359
 - ボソン, 28, 359, 368, 373
 - 粒子, 55
- 光円錐, 88
- 交換関係, 194, 332, 337
- 光子, 13, 28, 56
- 光 (量) 子, 113
- 高周波加速, 147, 161
- 高周波ギャップ, 158
- 光速不変の原理, 77
- 構造定数, 242, 367
- 光電子増倍管, 133
- 恒等回転, 236
- 勾配, 179
- 国際リニアコライダー (ILC), 173
- コスモトロン, 157
- コッククロフト・ウォルトン型, 145
- 固有時, 83
- 固有状態, 336
- 固有の長さ, 82
- サイクロトロン, 147
 - 周波数, 150
- 最小識別可能距離, 125
- 坂田モデル, 231
- 桜井の考察, 244
- 作用, 351
- 自然単位系, 48, 109, 189
- 質量項, 363
- 質量数, 10
- 斜交座標系, 86
- 周期表, 6
- 周波数変調サイクロトロン, 152
- 縮約の規則, 97
- シュレーディンガー方程式, 114
- 衝突型加速器, 169
- 真空, 18, 27, 69
 - の期待値, 380
 - の誘電率, 24, 35
- シンクロサイクロトロン, 147, 152
- シンクロトロン, 155
 - 放射 (放射光), 171
- シンチレーションカウンタ, 133
- シールド効果, 259, 390
- 磁界の強度, 181
- 時間的, 90
- 時間の遅れ, 83
- 時間反転, 210, 225
- 磁気モーメント, 193

用語索引

- 時空座標, 92
- 時空連続体, 89
- 自己相互作用, 363
- 事象の地平線, 17
- 磁束密度, 181
- 自発的対称性の破れ, 67, 377, 378
- 自発的な対称性, 377
- 弱アイソスピン, 367, 368
- 弱荷, 28
- 弱集束型, 155
- 弱ボーズ粒子, 28
- 重粒子, 11, 57, 58
 - 数, 317
 - 族, 246
- 重力, 13, 27, 40
 - 子, 13, 28, 41
 - 相互作用, 22, 23, 56
 - 定数, 27, 41
 - 場, 27
- 寿命の延び, 84
- スカラー, 94
- スカラー積, 95, 177
- スカラー場, 378
- スカラーボソン, 378, 381
- スカラーポテンシャル, 95, 181
- ストリーマーチェーン, 131
- ストレンジネス, 221, 231, 269
- スピノル, 191
- スピン, 51, 191, 330, 335
 - 角運動量, 194
 - 行列, 194
- スーパーカミオカンデ, 393
- 静止エネルギー, 100
- 静止質量, 31
- 静止長, 82
- 生成演算子, 242
- 制動輻射, 134
- 世界, 89
 - 距離, 89
 - 線, 87
 - 点, 88
- 世代, 57, 60
 - クォークの3—, 60
 - 新—, 267
 - 数, 298, 300
 - 第2—, 267, 268, 270, 371
 - 第3—, 267, 290, 371
 - 第4—, 293
- 線形加速器, 167
- 絶対的過去, 90
- 絶対的未来, 90
- 漸近的自由, 261, 302
- 相互作用, 22
- 相対性の要請, 76
- 相対論, 71
 - 的運動方程式, 105
 - 的波動方程式, 116
- 相転移, 390
- 速度の合成則, 74
- 素粒子, 1, 11
- 素領域, 17
- 大域的（大局的）位相変換, 347
- 大域的（大局的）ゲージ変換, 63, 347
- 大域的対称性の破れ, 376
- 対称性, 346
 - の破れ, 376
- タウオン, 13
- タウニュートリノ, 13
- タウ粒子, 13
- 多線比例計数管, 139
- 単位元, 236
- タンデム・ヴァンデグラフ型, 146

- 第 1 種ゲージ変換, 347
- 大統一エネルギー, 395
- 大統一理論 (GUT), 391
- 第 2 種ゲージ変換, 348
- ダランベルシャン, 116, 180
- 断面積, 43, 172, 174, 267, 273, 286
 - 全一, 44
 - 単位立体角あたりの微分一, 46
 - 微分一, 46
- ダークマター, 401
- チェレンコフ
 - カウンター, 133
 - 検出器, 139
 - 光, 133
- チャージノ, 401
- チャーム, 274
 - 粒子, 268
 - 量子数, 274
- チャーモニウム, 274, 278
- 中間子, 12, 32, 57, 58
- 中間子 (メソン)
 - 族, 243
- 中性 K 中間子, 220
- 中性カレント, 375
- 中性ゲージボソン, 374
- 中性子, 9
- 中性スカラー場, 379
- 超核子, 58
- 超銀河団, 16
- 超対称性理論, 229, 399
- 超対称大統一理論, 394
- 超対称粒子, 399
- 超伝導状態, 386
- 直積, 248
- 直和, 248
- 直交群 $O(n)$, 243
- 対消滅, 312
- 対生成, 312
- 強い相互作用, 22, 36, 56, 255, 359
- 強い力, 13, 28
- 点状粒子, 9
- ディラック
 - の海, 304
 - の空孔理論, 307
 - のケットベクトル, 317
 - 方程式, 191, 195, 196, 200
 - ・パウリ表現, 199
- ディー, 147
- 電界の強度, 181
- 電荷の保存, 352
- 電荷密度, 181, 308
- 電気双極子能率 (EDM), 226
- 電気力, 24
- 電子, 9, 13
 - ニュートリノ, 13
 - ボルト, 46
 - ・陽電子対, 138
- 電子・陽電子衝突, 287
 - 型加速器, 283
 - 反応, 286
- 電磁カロリメータ, 134
- 電磁相互作用, 22, 23, 33, 56, 359
 - の結合定数, 34
- 電磁場, 27
- 電弱相互作用, 359, 369
- 電弱統一理論, 366, 373
- 電弱理論, 366
- 電束密度, 181
- 電場, 25, 26
- 電離, 128
 - 箱, 139
- 電流密度, 181, 308

用語索引

- 透磁率, 181
- 到達距離, 32, 40
- 特殊相対論, 71
- 特殊ユニタリー群, 232
- トッポニウム, 283
- 導波管, 168
- ドップラー効果, 16
- ド・ブロイの関係式, 113
- ド・ブロイ波長, 125
- ドリフトチェンバー, 131, 139
- 南部・ゴールドストーン定理, 383
- 南部・ゴールドストーンボソン, 383
- 西島・ゲルマンの式, 317
- ニュートラリーノ, 401, 403
- ニュートリノ, 12
- ニュートンの運動方程式, 75
- 熱輻射, 112
- ネーターの定理, 346
- ハイパー電荷, 232
 - 弱一, 369
- 八道説, 235, 269
- 発散 (ダイバージェンス, 湧出), 178
- ハッブル定数, 16
- ハッブル法則, 16
- 波動関数, 29, 51, 114, 238
- ハドロンの, 11, 22, 57, 62
 - 生成, 288
 - カロリメータ, 134
- ハミルトニアン, 197
- 反クォーク, 234
 - 粒子, 235
- 反交換関係, 198
- 反重粒子, 58
- 反対称テンソル, 360
- 反チャームクォーク, 274
- 反中性子, 55
- 反電子ニュートリノ, 9
- 反物質, 220
 - の世界, 323
- 反変ベクトル, 97
 - 演算子, 180
- 反陽子, 55
- 反粒子, 11, 13, 304
- 場, 24, 29
- 媒介粒子, 13, 24, 26, 55
- バリオン, 11, 235
 - 数, 232, 315
- バルジ, 15
- パンチ, 161
- 万有引力, 41
- バーテックス (vertex), 34, 255
- バーン (b), 174
- パウリのスピ行列, 194, 198, 367
- パウリの排他律, 54, 56
- パリティ
 - の固有値, 212
 - 非保存, 214
 - 不変性, 211
 - 変換, 211
- パートン, 234
- 非アーベル (non-Abelian) 理論, 258
- 非可換局所ゲージ変換, 368
- 飛跡検出器, 140
- 左巻き, 214
 - 成分, 214
 - ニュートリノ, 216, 370
- ヒッグス, 56
 - 機構, 64, 70, 362, 366, 378, 383, 385
 - 場, 64, 70, 364
 - ポテンシャル, 65
 - 粒子, 64, 373, 397

- ポテンシャル, 381
- 標準モデル, 295
- 標準理論, 229, 359, 366, 391
- 比例計数管, 139
- 微細構造定数, 35
- ビッグバン, 18, 403
- ビーム・オブティックス, 167
- ビーム集束, 151
- ファインマン図, 34, 254, 312
- ファラデー・レンツの法則, 181
- フェムトメートル, 126
- フェルミ
 - 結合定数, 38
 - ・ディラック統計, 54
 - 粒子, 51, 53
- フェルミオン数, 393
- フェルミオン数の保存, 393
- 負エネルギー
 - 状態, 307, 309
 - 粒子, 304
- 不確定性関係, 29
- 複素スカラー場, 355, 364, 371
- 負の確率密度, 306
- 不変性, 346
- フレーバー (flavor), 57, 234, 256
- ブライト・ウィグナーの共鳴公式, 273
- 分解能, 122, 124, 125
- 分散式, 114
- 分子, 5
- プランク
 - 温度, 43
 - 質量, 42
 - 単位系, 51
 - 長, 42
 - 定数, 29, 50
- プロキシマ・ケンタウリ, 14
- プロポーショナル計数管, 131
- 平均値, 115
- ヘリシティ, 214
- 変分, 351
- ベクトル積, 177
- ベクトルポテンシャル, 95, 181
- ベクトルメソン, 245
- ベータトロン, 152
 - 振動, 153, 154
 - 振動数, 165
 - チューン, 154
- ベータ崩壊, 23
- ベータ・ブロックの精密計算, 128
- 保存量, 346
- ボイド, 16
- 膨張宇宙, 16
- ボルツマン定数, 43
- ボーズ
 - ・アインシュタイン凝縮, 54, 69, 387, 389
 - ・アインシュタイン統計, 54
 - 粒子, 51, 53
- ポテンシャル
 - 湯川—, 32
- マイスナー効果, 386
- マクスウェル方程式, 181
- 右巻き, 214
 - 成分, 214
 - 反ニュートリノ, 216
- ミューオン, 13
- ミューニュートリノ, 13
- ミュー粒子 (ミューオン), 13
 - の崩壊, 84
- ミンコフスキー空間, 93
- メソン, 12

用語索引

- メソン (中間子) , 235
- 誘電率, 181
- ユニタリー
 - 演算子, 241
 - 極限, 397
 - 行列, 242
 - 群, 241, 242
- 陽子, 9
 - 崩壊, 393
- 陽電子, 55, 307
- 弱い相互作用, 12, 22, 23, 38, 56, 216, 256, 359
- 弱い力, 13, 28
- ラグランジアン, 350
- ラグランジュ関数, 350
- ラブラシアン, 180
- リニアコライダー (linear collider), 171
- リニアック : LINAC, 167
- 粒子, 29
- 量子色力学 (QCD), 38, 69, 254, 259, 275
- 量子仮説, 112
- 量子電磁力学 (QED), 36, 254, 259
- リー (Lie) 群, 236
- ルミノシティ, 172, 283
- 励起, 128
- レプトン, 11, 13, 38, 59, 373
 - 重い—, 293
 - 数, 315
- 電磁気力, 13
- ローレンツ
 - 因子, 80, 108, 111
 - ゲージ, 183, 186
 - 条件, 185
 - 不変性, 85
 - 不変量, 93, 94
 - 変換, 71, 77, 101, 104
 - 力, 148
 - ・フィッツジェラルドの短縮, 82, 83
- ワイル表現, 199
- ワインバーグ角, 374

人名索引

- アインシュタイン, A., 31
 アリストテレス, 4
 飯塚重五郎, 276
 ヴェクスター, V. I., 157
 呉健雄 (ウー) , 216
 大久保進, 276
 カースト, D. W., 152
 クローニン, J., 220
 クーパー, L., 69
 クーロン, C. A., 24
 グラショウ, S., 270, 366
 ゲルマン, M., 11, 232, 234, 252
 小柴昌俊, 2
 坂田昌一, 231
 桜井純 (J. J. Sakurai), 244
 サミオス, N., 269
 サラム, A., 270, 366
 タレス, 4
 チェレンコフ, P. A., 133
 ツバイク, G., 11, 234, 276
 ティン, S. C. C., 268, 271
 ディラック, P., 191
 デカルト, R., 3
 デモクリトス, 4
 ドルトン, J., 4
 ド・ブロイ, L., 29
 中野薫夫, 232
 南部陽一郎, 252, 378
 西島和彦, 232
 ニュートン, I., 72
 ネーター, E., 346
 ハイゼンベルグ, W. K., 29
 韓茂榮, 252
 パウエル, C. F., 32
 ヒッグス, P. W., 64
 ファインマン, R., 34
 フィッチ, V., 220
 フェルミ, E., 51
 プランク, M., 112
 ボース, S., 51
 ポアンカレ, H., 81
 マクスウェル, C., 176
 マクミラン, E. M., 157
 宮本米二, 252
 メンデレーエフ, D. I., 6
 山内泰二, 281
 楊振寧 (ヤン) , 216
 湯川秀樹, 2, 32
 リヒター, B., 268, 271
 リビングストン, M. S., 147
 李政道 (リー) , 216
 レーダーマン, L., 281
 ローレンス, E. O., 147
 ローレンツ, H., 81
 ワインバーグ, S., 270, 366

著者紹介

樋口 正人 (ひぐち まさと)

1940 年 (昭和 15 年), 宮城県に生まれる。1965 年, 東北大学大学院理学研究科原子核理学専攻修士課程修了。東北大学理学部助手を経て, 1967 年より東北学院大学工学部に勤務。1986 年, 東北大学から理学博士号の称号を授与される。1988 年より東北学院大学工学部教授。その後, 東北理工専門学校理事, 高エネルギー加速器研究機構客員教授を兼任。長年, 一貫して理論・実験の両面から素粒子物理学の研究に尽力, 特に泡箱素粒子飛跡写真の解析プログラム構築等にも寄与, また教育を通して学生の素粒子・高エネルギー物理学への関心や研究意欲を高め, 若手研究者や技術者の裾野を広げることに力を注いだ。2007 年東北学院大学を定年退職。東北学院大学名誉教授。2019 年 6 月没。

素粒子読本

2020 年 10 月 10 日 初版 オンデマンド版発行

著者

樋口 正人

編集

小林 悌二 齋藤 暁

発行者

飯澤 正登実

発行所

やまなみ書房

〒156-0043 東京都世田谷区松原 5 丁目 22 番地 6 番 リベラリティ内

<https://www.yamanami.tokyo/>

books@yamanami.tokyo

カバーデザイン

釜田 真穂美

初版 オンデマンド版 ISBN 978-4-909624055

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



© 2020 Masato Higuchi

