形式論理探求

第 1 巻
古典論理のタブロー

$$\neg\neg(\exists x_1)((\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(x_1,x_2)) \land (\forall x_2)(P(x_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2)))$$

$$(\exists x_1)((\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(x_1,x_2)) \land (\forall x_2)(P(x_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2)))$$

$$(\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(c_1,x_2)) \land (\forall x_2)(P(c_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2))$$

$$(\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(c_1,x_2))$$

$$(\forall x_2)(P(c_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2))$$

$$\neg P(c_1,c_1) \to P(c_1,c_1)$$

$$P(c_1,c_1) \to \neg P(c_1,c_1)$$

$$\neg\neg P(c_1,c_1) \qquad P(c_1,c_1)$$

$$P(c_1,c_1) \qquad \neg P(c_1,c_1) \quad \neg P(c_1,c_1)$$

$$\text{✗} \qquad \text{✗}$$

$$\neg P(c_1,c_1) \quad \neg P(c_1,c_1)$$

$$\text{✗} \qquad \text{✗}$$

高木 翼

やまなみ書房

形式論理探究

第1巻
古典論理のタブロー

高木 翼

やまなみ書房

はじめに

❒ 形式論理とは

本書では、タブローという図を用いて形式論理（特に、古典論理）を分析する。形式論理とは、経験によって得られる個別の内容ではなく、論証の形式に注目する論理である。人が何を思い、そして何を考えるかということは、その人の個人的な経験によって左右されるが、推論の形式は客観的に決まっている。そこで、経験という個人がもつ主観的な体験に左右されずに、誰もが納得できるような、論理の客観的な側面に注目したのが形式論理であるといえるだろう。

❒ 各章の概要

古典論理は最も基本的な論理であり、厳密には古典命題論理と古典述語論理に大別される。

第 1 章では、古典命題論理における「意味」の理論について述べる。この章では、真理値表と呼ばれる表の読み書きの習得を目指すことになる。

第 2 章では、古典命題論理における「意味」の理論をふまえた上で、タブローという単純かつ強力な道具によって古典命題論理を分析する方法と、その原理について述べる。

第 3 章では、古典述語論理における「意味」の理論について述べる。この章では、真理値表では解決できない問題に遭遇する。そこで、真理値表なしで、その問題に対処する方法を学ぶ。

第 4 章では、古典述語論理における「意味」の理論をふまえた上で、タブローによって古典述語論理を分析する方法と、その原理について述べる。基本的には、第 2 章を発展させた内容を学ぶことになるが、その内容は第 2 章よりもさらに複雑かつ難解なものとなる。

本書を通読することによって、古典述語論理のタブローの使い方とその原理（健全性と完全性）を理解することができる*。よって、数ある形式論理の中でも最も基本的で根幹をなす古典述語論理の論証については、自由自在に分析できるようになっているはずだ。もちろん、「古典」というからには、古典以外の形式論理も世の中には存在している。非古典論理のタブローについては、本書の続刊で順次扱っていく予定である。

❒ 確認問題と演習問題について

論理学は実践と強く結びついている学問である。そこで、学んだことを実践する機会をつくるために、本書の各節の最後には、確認問題（✍マークが目印）を設けた。どの確認問題もそれ以前の内容が理解できていれば容易に解けるようになっているので、理解の確認のためにも、確認問題を解きながら読み進めることが強く推奨される。また、各章の最後には、その章全ての内容を出題範囲とする演習問題がある。演習問題は確認問題よりも少し難しくしてあるが、腕試しの問題として、余裕があればぜひ挑戦してみてほしい。また、独習する読者のために全ての確認問題と演習問題の解答を用意した。

本書を執筆するにあたり、多くの方々に御協力を賜わりました。齋藤曉さん、脇本佑紀さん、保科宏樹さん、宇田津孝介くんには、本書の草稿について多数の有益なコメントをいただきました。やまなみ書房の飯澤正登実さんには本書の出版の機会を与えていただきました。この場を借りてお礼申し上げます。また、筆者をいつも暖かく見守ってくれた父と母に感謝します。

2019 年 5 月

高木　翼

---

* ただし、本書で扱うのは最も基本的な古典述語論理のみであって、古典述語論理に関する全ての話題を扱うわけではない。そのような発展的な話題がどのようなものなのか知りたい読者のために、第 4 章の後に補遺を追加した。

目次

第1章

古典命題論理の意味論

私たちが普段用いている論理は、私たちが想像しているよりも遥かに複雑な構造をしている。そこで、いきなりその論理について語るのではなく、まずはその様々な側面を切り取ることで得られる断片について語ることにしよう。このような断片の中で最も基本的なものとして古典論理と呼ばれる論理がある。そして、古典論理は古典命題論理と古典述語論理（以降では、単に「命題論理」、「述語論理」と略す）の二つに分かれる。まずは、前者について学んでいく。

§1.1　命題の意味

命題論理では、命題と呼ばれる文のみを扱う。命題とは、判断や主張を表わす文で、それが正しいかどうかを明確に判定できるもののことをいう。素朴には、命題が正しいとは、その命題が表現する内容と事実が一致することをいう。例えば、「日本は島国だ」という文が表わす内容は事実なので、「日本は島国だ」は正しい命題だが、「元日は 1 月 2 日だ」という命題が表わす内容は事実ではないので、「元日は 1 月 2 日だ」という文は正しい命題ではない。命題が正しいとき、その命題は真であるといい、命題が正しくないとき、その命題は偽であるという。

命題の意味とは、命題の真偽のことである。例えば、「日本は島国だ」の意味は真で、「元日は 1 月 2 日だ」の意味は偽となる。しかし、この用法は我々が普段用いている「意味」の意味とはかなり異なる。実際、「『日本は島国だ』とはどういう意味ですか」と尋ねたときに「その意味は真です」という返答がきたら驚くだろう。しかし、ひとまず命題論理における「意味」の定義はそうなっている、ということで了解してほしい。このよ

うな定義が、ある程度有効かつ便利であるということは、命題論理を学ぶ内に分かるようになるだろう。

二つの命題の意味が常に一致するとき、それらの命題は同じ意味であるという。例えば、「私は猫が好きだ」と「私は猫が好きではない、ということはない」は同じ意味になる。なぜなら、

(i) もしも「私は猫が好きだ」が真なら「私は猫が好きではない」は偽になるので、「私は猫が好きではない、ということはない」は真になり、

(ii) もしも「私は猫が好きだ」が偽なら「私は猫が好きではない」は真になるので、「私は猫が好きではない、ということはない」は偽になる

からである。つまり、「私は猫が好きだ」の意味に関係なく、「私は猫が好きだ」と「私は猫が好きではない、ということはない」の意味は一致している。両者のニュアンスは異なるが、論理学としては、両者は同じ意味ということになる。あるいは、「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」と「猫は私が好きだし、私も猫が好きだ」も同じ意味になる。なぜなら、

(i) もしも「私は猫が好きだ」と「猫は私が好きだ」が共に真なら「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」と「猫は私が好きだし、私も猫が好きだ」は共に真になり、

(ii) もしも「私は猫が好きだ」と「猫は私が好きだ」のどちらか一方が偽なら「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」と「猫は私が好きだし、私も猫が好きだ」は共に偽になる

からである。やはり、「私は猫が好きだ」と「猫は私が好きだ」の意味に関係なく、「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」と「猫は私が好きだし、私も猫が好きだ」の意味は一致している。

確認問題 1

✍ 次の文はそれぞれ命題だろうか。命題なら、その意味を答えよ。

(1)「2 に 3 を足せば 5 ですか」

(2)「明日は雨が降る」

(3)「ヒトは哺乳類だ」

(4)「お年寄りには席を譲るべきだと思う」

(5)「最小の整数がある」

確認問題 2

✍ 次の二つの問いについて、その理由も含めて答えよ。

(1)「私は猫が好きだ」と「私は猫が嫌いではない」は同じ意味だろうか。

(2)「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」と「私は猫が好きだけれども、猫は私が好きだ」は同じ意味だろうか。

§1.2　「または」と「ならば」

日常用語における「または」には曖昧さがある。例えば、レストランで「パンまたはライスが選べます」(「パンかライスが選べます」) と言われたとき、普通は「パンとライスのどちらか一方が選べる」と解釈するのであって、パンもライスも選ぶ人はいないだろう。しかし、「私のとなりにいる人は医者または弁護士だ」(「私のとなりにいる人は医者か弁護士だ」) と言うとき、その人が医者であり、しかも弁護士でもある可能性を普通は排除しない。このように、「A または B」と言うとき、それが「A と B のどちらか一方」ということなのか、それとも「A と B の少なくともどちらか一方」ということなのかは文脈によって変わる。前者は排他的選言（せんげん）、後者は両立的選言（せんげん）と呼ばれている。

日常用語における「ならば」にも曖昧な点がある。例えば、「やる気がないなら帰ってください」と言われたとき、私にやる気がないのに帰らない場合には、この命令に従っていないということになる。しかし、私にやる気がある場合も命令違反になるのだろうか。言い換えれば、「私にはやる気がない」が偽のとき、「私にやる気がないなら私は帰る」も偽になるのだろうか。古典論理では、その場合には「私は帰る」の意味に関係なく「私にやる気がないなら私は帰る」は真であると考える。なぜなら、「やる気がないなら帰ってください」という命令は、「私にはやる気がない」という条件を満たす場合に私がどうすべきかを指定しているだけであって、そもそも私にやる気があるときの私の行動は指定していない。よって、そもそも私にやる気がある時点で、この命令に違反していることにはならない。このような、古典論理における「ならば」のことを実質含意(がんい)という。

実質含意には、他に注意すべき点が二点ほどある。いずれも、実質含意の不備に関連するが、その改善の試みは、古典論理の範囲を逸脱するので、ここでは扱わない。

第一に、実質含意は、日常用語としての「ならば」の特徴を正確に反映していない。例えば、「2 に 3 を足せば 5 になるなら隅田川は川だ」は古典論理において真になる。しかし、感覚的には、2 に 3 を足せば 5 になることと隅田川は川であることは無関係なので、前者から後者が帰結するという主張は奇妙に感じられるのではないだろうか。このように、実質含意は、関連のない二つの命題を結びつけるときには奇妙な振る舞いをしてしまう。

第二に、実質含意は、事実ではないことを条件として仮定しない。例えば、「私に翼があったなら自由に空を飛べた」という文は、「私に翼があった」という事実ではないことを条件として仮定している。このような「ならば」の使い方のことを反事実的条件法という。反事実的条件法を分析するときには、「様相」と呼ばれる概念が関わってくるので、古典論理よりも複雑な論理が必要になる。

確認問題 3

✍ 両立的選言を表わす命題としてふさわしいものを次の選択肢から全て選べ。

① K さんは東京か大阪にいる。

② 中学生以上か保護者同伴であれば参加できる。

③ 地震、雷、火事、親父の内に私が怖いと感じるものがある。

④ L さんは M さんのことが好きか嫌いのどちらかだ。

確認問題 4

✍ K さんは、交際を申し込んできた L さんに「100 万円くれないなら交際してあげない」と言った。

(1) L さんは K さんに 100 万円を渡せなかったが、K さんは交際してくれた。このとき、K さんは約束を守ったことになるだろうか。理由も含めて答えよ。

(2) K さんと L さんが交際していたら、L さんは K さんに 100 万円を渡したと考えてよいだろうか。ただし、K さんは必ず約束を守るものとする。理由も含めて答えよ。

§ 1.3　命題の記号化

ここまでは、記号を用いずに話を進めてきた。しかし、数学を全て日本語で記述することが大変なように、論理学も日本語だけで記述しようとするのは無理がある。そこで、数学において円周率のことを π と記号化したり、「等しい」ということを = と記号化したように、論理学においても命題や接続詞を記号化しよう。

まず、原子命題と呼ばれる命題を $A, B, C, D, E, \ldots$ と記号化する。原子命題とは、それ以上分析することのできない命題のことである。例えば、

「私は猫が好きだし、犬も好きだ」は、「『私は猫が好きだ』かつ『私は犬が好きだ』」と分析されるので、原子命題ではない。しかし、「私は猫が好きだ」あるいは「私は犬が好きだ」は原子命題になっている。なぜなら、命題論理では、「私」と「猫が好きだ」や「犬が好きだ」の間にある関係性を表現することができないので、「私は猫が好きだ」や「私は犬が好きだ」をこれ以上分析することはできないからである。厳密に言えば、記号化された後の原子命題はあくまでも単なる記号であって命題ではないが、毎度「原子命題の記号」と呼ぶのは面倒なので、以下では原子命題の記号のことも「原子命題」と呼ぶことにする。また、命題の記号のことも「命題」と呼ぶことにする。

次に、「〜ではない」(否定)、「かつ」(連言(れんげん))、「または」(両立的選言)、「ならば」(実質含意) をそれぞれ $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ と記号化する。これら四つの記号のことを論理結合子という。例えば、A を「私は猫が好きだ」、B を「私は犬が好きだ」とすると、「私は猫が好きではない」は $\neg A$, 「私は猫が好きだし、犬も好きだ」は $A \wedge B$, 「私は猫または犬が好きだ」は $A \vee B$, 「私は猫が好きなら犬も好きだ」は $A \rightarrow B$ となる。

A を「K さんは大学生である」、B を「L さんは大学生である」としたとき、「K さんと L さんの少なくとも一方は大学生ではない」は「〜ではない」という否定が A と B のそれぞれに掛かっているので、$(\neg A) \vee (\neg B)$ と記号化し、「K さんと L さんの少なくとも一方が大学生というわけではない」は「〜ではない」という否定が $A \vee B$ の全体に掛かっているので、括弧を用いて $\neg(A \vee B)$ と記号化する。つまり、括弧によって、その中身を先に処理するという指示を表わすことにする。

実は、数学にも似たような記法がある。例えば、「5 を 2 と 3 を足した結果に掛ける」を記号化すると $5 \times (2 + 3)$ となるが、やはり括弧の中身 $2 + 3$ が掛け算よりも先に処理されている。しかし、「5 と 2 を掛けた結果に 3 を足す」を記号化するとき、普通は $5 \times 2 + 3$ と書き、$(5 \times 2) + 3$ とは書かない。なぜなら、足し算よりも掛け算の方を先に処理するという規則があるからである。同様の規則は論理学にもある。論理学では、$\neg$

を $\land$ や $\lor$ よりも先に処理し、$\land$ や $\lor$ を $\to$ よりも先に処理する。例えば、$\neg A \land B$ は $(\neg A) \land B$ と同じことを表し、$A \to B \lor C$ は $A \to (B \lor C)$ と同じことを表している。まとめると、論理結合子の優先順位を高い順に並べれば次のようになる。

❶ $\neg$　　❷ $\land, \lor$　　❸ $\to$

よって、$\neg$ は $\to$ よりも優先される。例えば、$\neg A \to B$ は $(\neg A) \to B$ と同じことを表している。

　このとき、優先順位が同じなら括弧を省略することはできない。例えば、$(A \land B) \lor C$ の括弧を省略することはできない。なぜなら、$A \land B \lor C$ としてしまうと、それが $(A \land B) \lor C$ と $A \land (B \lor C)$ のどちらを表わすのかが不明確になってしまうからである。ただし、$\neg$ の場合は省略してもよい。例えば、$\neg\neg A$ は $\neg(\neg A)$ 以外を表しえないので、$\neg(\neg A)$ の括弧を省略して $\neg\neg A$ と書いてもよい。

　以下では、どの命題も括弧を可能な限り省略した形で表わすことにする。

確認問題 5

✍ 次の命題をそれぞれ記号化せよ。

(1) K さんと L さんは二人とも大学生ではない。

(2) K さんと L さんの二人ともが大学生というわけではない。

(3) K さんが大学生ではないなら L さんも大学生ではない。

(4) K さんが大学生なら L さんも大学生というわけではない。

確認問題 6

✍ 次の命題の括弧を可能な限り省略した形でそれぞれ表わせ。

(1) $(A \land B) \to C$

(2) $(\neg(\neg A) \lor B) \to C$

(3) $A \wedge ((B \wedge C) \to D)$

(4) $A \wedge (((\neg B) \wedge C) \to D \vee E)$

(5) $\neg(A \to B) \vee (C \wedge ((\neg D) \to E))$

§ 1.4　真理値表

命題のみならず、命題の意味も記号化できる。すなわち、命題が真であるということを “True” の頭文字をとって T と記号化し、命題が偽であるということを “False” の頭文字をとって F と記号化する。この二つの記号のことを命題の真理値という。また、命題の真理値と、その命題を構成する原子命題の真理値の間にある関係を表現した表のことをその命題の真理値表という。

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ の真理値表は、それぞれ下の表 1.1 から表 1.4 のようになる。ただし、ここで「または」は両立的選言として用いられているということに注意せよ。

表 1.1: $\neg A$ の真理値表

A	$\neg A$
T	F
F	T

表 1.2: $A \wedge B$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1.3: $A \vee B$ の真理値表

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.4: $A \to B$ の真理値表

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

もう少し複雑な例もみてみよう。例えば、「私は猫が好きなら犬は好きではない、というわけではない」は $\neg(A \to \neg B)$ と記号化される。この命題の真理値表を直ちに書くのが難しい場合は、補助的に $\neg B$ や $A \to \neg B$ の真理値表も組み合わせて、下の表 1.5 のように書いてもよい。

表 1.5: $\neg(A \to \neg B)$ の真理値表

A	B	$\neg B$	$A \to \neg B$	$\neg(A \to \neg B)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F

§ 1.1 で述べたように、二つの命題の意味が同じであるとは、それらの意味が常に一致するということだった。二つの命題の意味が同じかどうかは、それらの命題の真理値表を比較することで判定できる。例えば、$\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ の真理値表を一つにまとめると、下の表 1.6 のようになる。

表 1.6: $\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

この表によれば、

(i) もしも A と B のどちらか一方が真なら $\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ は共に偽になり、

(ii) もしも A と B が共に偽なら $\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ は共に真になる

ので、A と B の意味に関係なく、$\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ の意味は一致している。よって、$\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ は同じ意味である。

また、真理値表を比較すれば、任意の命題 A_1, A_2, A_3 に対して、

(i) $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ と $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$ は同じ意味になり、
(ii) $(A_1 \vee A_2) \vee A_3$ と $A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$ も同じ意味になる

ことも分かる。この (a) と (b) のことを結合法則という。結合法則によれば、$A_1 \wedge A_2$ を先に処理しても、$A_2 \wedge A_3$ を先に処理しても意味は変わらないので、$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ あるいは $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$ を省略して $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ と書くことにする。同様に、$(A_1 \vee A_2) \vee A_3$ あるいは $A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$ も省略して $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ と書くことにする。

確認問題 7

✍ 次の命題をそれぞれ記号化した上で、その真理値表を描け。

(1) 私は猫が好きだが犬は嫌いだ、ということはない。
(2) 私は猫が好きではないか犬が嫌いではないなら犬が嫌いだ。

確認問題 8

✍ 真理値表を用いて次の二つの問い答えよ。

(1)「私は猫が好きではないが、犬は好きだ」と「私は猫が好き、または犬が好きではない、というわけではない」は同じ意味だろうか。
(2)「私は猫が好き、または犬が好きではない」と「私は猫が好きではないが犬は好きだ、というわけではない」は同じ意味だろうか。

§1.5　命題の変形

§1.4 では $\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$ が同じ意味になるということを示した。同様に、$\neg A \vee \neg B$ と $\neg(A \wedge B)$ も同じ意味になるということが、下の表 1.7 から分かる。このように、$\neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \vee B)$, $\neg A \vee \neg B$ と $\neg(A \wedge B)$ がそれぞれ同じ意味であるという法則のことをド・モルガンの法則という。ド・モルガンの法則は、原子命題 A と B に対してのみならず、A と B を一般の命題に置き換えた場合でも成り立つ。

表 1.7: $\neg A \vee \neg B$ と $\neg(A \wedge B)$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

また、$A \to B$ と $\neg A \vee B$ も同じ意味になるということが、下の表 1.8 から分かる。よって、$A \to B$ を $\neg A \vee B$ に変形してよいし、逆に $\neg A \vee B$ を $A \to B$ に変形してもよい。つまり、実質含意 $\to$ は、否定 $\neg$ と両立的選言 $\vee$ で表現できるということになる。

表 1.8: $A \to B$ と $\neg A \vee B$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \vee B$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

このように、同じ意味をもつ命題のパターンがいくつかあるので、それらを覚えておくことで、真理値表を描くことなく、与えられた命題を同じ意味をもつ別の命題に変形できる。例えば、ド・モルガンの法則と「任意の命題 A_1 に対して、$\neg\neg A_1$ と A_1 が同じ意味になる」という法則（二重否定則と呼ばれる）を知っていれば、真理値表を描かなくても、$\neg A \vee B$ は $\neg(A \wedge \neg B)$ と同じ意味になるということが直ちに分かる。下に、そのパターンを列挙しておこう。ただし、A_1, A_2, A_3 は任意の命題を表わす。

重要 !! **同じ意味をもつ命題の例**

ド・モルガンの法則

(a) $\neg A_1 \wedge \neg A_2$ と $\neg(A_1 \vee A_2)$

(b) $\neg A_1 \vee \neg A_2$ と $\neg(A_1 \wedge A_2)$

実質含意の別表現　$A_1 \to A_2$ と $\neg A_1 \vee A_2$

二重否定則　$\neg\neg A_1$ と A_1

結合法則

(a) $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ と $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$

(b) $(A_1 \vee A_2) \vee A_3$ と $A_1 \vee (A_2 \vee A_3)$

分配法則

(a) $A_1 \vee (A_2 \wedge A_3)$ と $(A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3)$

(b) $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)$ と $(A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge A_3)$

余裕のある読者は、これらの法則が本当に正しいのかどうかを真理値表によって検証してみるとよい。

確認問題 9

✍ 次の二つの問いについて、論理結合子 $\neg$ が $\neg A, \neg B, \neg C$ の形でしか現れないような形で答えよ。

(1) $\neg(A \vee (B \wedge C))$ と同じ意味になるような命題をつくれ。

(2) $\neg((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C))$ と同じ意味になるような命題をつくれ。

§ 1.6　命題論理の論証

n 個の命題 $A_1, \ldots, A_n$ から命題 A_{n+1} が導かれるという主張を $A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} への論証といい、$A_1, \ldots, A_n$ のそれぞれを前提、A_{n+1} を結論という。論証と「ならば」は似ているが、両者を混同してはならない。「ならば」によって接続された命題 $A_1 \to A_2$ の A_1 の部分は前提ではなく前件、A_2 の部分は結論ではなく後件と呼ばれている。

命題 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1}$ が常に真になるとき、$A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} への論証は妥当であるという。一般に、命題が常に真になるとき、その命題は恒真であるという。以下では、$A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} を導く論証が妥当であるということを $A_1, \ldots, A_n \models A_{n+1}$ と表わし、妥当ではないということを $A_1, \ldots, A_n \not\models A_{n+1}$ と表わす。

例えば、A を「私は傘をさしていない」、B を「雨は降っていない」とすると、「私が傘をさしていないなら雨は降っていない。しかし、雨は降っている。よって、私は傘をさしている」は、$A \to B, \neg B$ から $\neg A$ への論証となる。このとき、$(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ の真理値表を描けば、下の表 1.9 のようになる。この表から、$(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ は恒真になることが分かるので、$A \to B, \neg B \models \neg A$ となる。この妥当な論証は、モーダストレンス（後件否定）と呼ばれている。

表 1.9: $(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ の真理値表

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$(A \to B) \wedge \neg B$	$(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

あるいは、A を「私は努力する」、B を「私は成功する」とすると、「私は努力するなら成功する。しかし、私は努力しない。だから、私は成功しない」は、$A \rightarrow B, \neg A$ から $\neg B$ への論証となる。このとき、$(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow \neg B$ の真理値表を描けば、下の表 1.10 のようになる。この表によれば、$(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow \neg B$ は恒真にならないので、$A \rightarrow B, \neg A \not\models \neg B$ となる。この妥当ではない論証は、前件否定の誤謬と呼ばれている。

表 1.10: $(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow \neg B$ の真理値表

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg A$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg A \rightarrow \neg B$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T

論証が妥当であることと、結論が真であることを混同しないように注意せよ。例えば、A が真なら $A \rightarrow B, \neg B$ から $\neg A$ への論証の結論 $\neg A$ は偽になるが、既に示したように、この論証は妥当である。つまり、論証の妥当性とは、論証を構成する命題の内容（命題が表わす事柄）の妥当性ではなく、論証の形式の妥当性のことを指している。

確認問題 10

✍ 次の二つの論証が妥当かどうかを真理値表を用いて判定せよ。

(1) 私は寝ている。私が夢をみていないなら私は寝ていない。ゆえに、私は夢をみている。

(2) 生物がいるなら水がある。水があるなら生物がいる。従って、生物がいるか水があるかのどちらか少なくとも一方だ。

§1.7　様々な論証

§1.6 では、モーダスポネンスは妥当な論証だが、前件否定の誤謬は妥当な論証ではないということを確認した。他にも名前がついた論証の例は色々あるので、既に紹介したものも含めて、下にまとめておこう。

妥当な推論の例

モーダスポネンス（前件肯定）　$A \to B, A \models B$
モーダストレンス（後件否定）　$A \to B, \neg B \models \neg A$
仮言的三段論法　$A \to B, B \to C \models A \to C$
選言的三段論法　$A \vee B, \neg A \models B$
構成的両刀論法　$A \to B, C \to D, A \vee C \models B \vee D$
破壊的両刀論法　$A \to B, C \to D, \neg B \vee \neg D \models \neg A \vee \neg C$

非妥当な推論の例

前件否定の誤謬　$A \to B, \neg A \not\models \neg B$
後件肯定の誤謬　$A \to B, B \not\models A$
選言肯定の誤謬　$A \vee B, A \not\models \neg B$

これらの全ての論証を検証するのは骨が折れるので、ここでは仮言的三段論法が妥当な論証であるということだけ検証する。余裕のある読者は、他の論証についても検証してみるとよい。

$A \to B, B \to C \models A \to C$ となることを示すためには、$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ が恒真になることを示せばよい。そこで、$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ を X とおくと、下の表 1.11 から分かるように、確かに X は恒真になっている。

表 1.11: $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ の真理値表

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	X
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

確認問題 11

✍ 「不正行為をしなければ試合に負ける。不正行為をすれば非難される。しかし、試合に負けても非難される。よって、いずれにせよ非難される」という論証が妥当かどうかを真理値表を用いて判定せよ。

演習問題

$\boxed{1}$ 任意の命題 X に対して、

$$N(X) = \begin{cases} 1 & (X \text{ は真}) \\ 0 & (X \text{ は偽}) \end{cases}$$

と定め、$N(A) = x$ かつ $N(B) = y$ とする。このとき、$N(\neg A \to \neg B)$ としてふさわしいものを次の選択肢の中から全て選べ。ただし、$\max(a, b)$ で a と b の最大値を表わすものとする。

① $\max(1-x, y)$　　② $1-x\times(1-y)$

③ $1-(1-x)\times y$　　④ $\max(x, 1-y)$

$\boxed{2}$ A を「K さんはその案に賛成する」、B を「L さんはその案に賛成する」、C を「M さんはその案に賛成する」とする。このとき、次の二つの問いに答えよ。

(1) A, B, C を用いて「K さん、L さん、M さんの内から二人以上を**任意に**選んだとき、選ばれた人たち全員がその案に賛成する」を二通りの（記号化された）命題で表わせ。ただし、$\wedge$ および $\vee$ 以外の論理結合子を用いてはならない。

(2) (1) で求めた二つの命題が同じ意味になるということを真理値表を用いて説明せよ。

$\boxed{3}$ 正直者は常に本当のことを言い、嘘つきは常に嘘をつくものとする。どの人も正直者か嘘つきのどちらか一方であるとき、次の二つの問いに答えよ*。

(1) K さんは「私は正直者だが、L さんは嘘つきだ」と言い、L さんは「私は嘘つきだし、K さんも嘘つきだ」と言った。誰が正直者で誰が嘘つきなのか答えよ。

(2) K さんは「M さんは嘘つきだ」と言い、L さんは「K さんが嘘つきなら私は正直者だ」と言い、M さんは「L さんが正直者なら私は嘘つきだ」と言った。誰が正直者で誰が嘘つきなのか答えよ。

$\boxed{4}$ 排他的選言を $\veebar$ という記号によって表わすことにする。例えば、A を「私はパンを選ぶ」、B を「私はライスを選ぶ」としたとき、$A \veebar B$ は「私はパンとライスのどちらか一方を選ぶ」となる。このとき、次の二つの問いに答えよ。

(1) $A \veebar B$ と同じ意味になるような命題をつくれ。ただし、論理結

---

* この問題を作成するにあたって、Raymond Smullyan『スマリヤン記号論理学：一般化と記号化』（川辺治之訳、丸善出版、2013 年）を参考にした。

合子は $\neg$ と $\vee$ のみを用いよ。

(2) $A \veebar B$ と同じ意味になるような命題をつくれ。ただし、論理結合子は $\neg$ と $\rightarrow$ のみを用いよ。

$\boxed{5}$ 「真か偽か分からない」を表わす記号 I を導入し、I も真理値であるとする。このとき、$A \wedge B$ と $A \vee B$ の真理値表はどのようになるだろうか。下の表 1.12 の空欄 a から j のそれぞれに T, F, I の内のどれが当てはまるか答えよ。

表 1.12: $A \wedge B$ と $A \vee B$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F
T	I	a	f
I	T	b	g
F	I	c	h
I	F	d	i
I	I	e	j

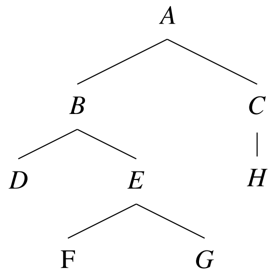
第 2 章

古典命題論理のタブロー

第 1 章では、真理値表を用いて論証が妥当かどうかを判定する方法を学んだ。しかし、この方法は、分析したい論証を構成する原子命題の種類が増えれば増えるほど指数関数的に大変になっていく。つまり、それぞれの原子命題は真か偽の二通りの可能性があるので、n 種類の原子論理式があれば、2^n 通りの可能性を全て調べなければならない。そこで、第 2 章では、より楽に論証が妥当かどうかを判定する方法を学ぶ。

§2.1　命題論理のタブローの規則

タブローとは、分析したい命題を「根」として、様々な「枝」や「葉」を付け加えることによって得られる図のことで、「木」構造をしている。例えば、$A, B, C, \ldots, H$ を命題としたとき、A を分析するタブローは次のようになるかもしれない。



このとき、一番上にある A が根であり、命題から伸びる線分および線分間を接続する命題 B, C, E が枝、枝の末端にある命題 D, F, G, H が葉となる。

タブローは、次の 7 種類の規則に従って描かれる。ただし、点線部分は、その部分に任意の長さの枝が現れてもよいということを表している。

∧ 規則

$$\begin{array}{c} A_1 \land A_2 \\ \vdots \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

¬∧ 規則

$$\begin{array}{c} \neg(A_1 \land A_2) \\ \vdots \\ \neg A_1 \quad \neg A_2 \end{array}$$

∨ 規則

$$\begin{array}{c} A_1 \lor A_2 \\ \vdots \\ A_1 \quad A_2 \end{array}$$

¬∨ 規則

$$\begin{array}{c} \neg(A_1 \lor A_2) \\ \vdots \\ \neg A_1 \\ \neg A_2 \end{array}$$

→ 規則

$$\begin{array}{c} A_1 \to A_2 \\ \vdots \\ \neg A_1 \quad A_2 \end{array}$$

¬→ 規則

$$\begin{array}{c} \neg(A_1 \to A_2) \\ \vdots \\ A_1 \\ \neg A_2 \end{array}$$

二重否定除去則

$$\begin{array}{c} \neg\neg A_1 \\ \vdots \\ A_1 \end{array}$$

全てのタブローの規則は、

(1) 枝分かれしない場合には、規則を適用した命題が真ならその規則を適用して得られる**全ての**命題も真

(2) 枝分かれする場合には、規則を適用した命題が真ならその規則を適用して得られる二つの命題の**どちらか少なくとも一方**も真

となるように定められている。タブローのある規則がこれらの条件を満たしているとき、その規則は上から下への真理保存性を満たしているといい、全ての規則が上から下への真理保存性を満たしているとき、タブローは上から下への真理保存性を満たしているという。

例えば、$A_1 \land A_2$ が真なら、それに ∧ 規則を適用して得られる A_1 と A_2 も共に真となり、$A_1 \lor A_2$ が真なら、それに ∨ 規則を適用して得られる A_1 との A_2 のどちらか少なくとも一方も真となる。

$$
\begin{array}{c}
A_1 \land A_2 \\
\vdots \\
A_1 \\
A_2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A_1 \lor A_2 \\
\vdots \\
A_1 \quad A_2
\end{array}
$$

また、全てのタブローの規則は、

(1) 枝分かれしない場合には、その規則を適用して得られる*全ての*命題が真なら規則を適用した命題も真

(2) 枝分かれする場合には、その規則を適用して得られる二つの命題の*どちらか少なくとも一方*が真なら規則を適用した命題も真

となるように定められている。タブローのある規則がこれらの条件を満たしているとき、その規則は下から上への真理保存性を満たしているといい、全ての規則が下から上への真理保存性を満たしているとき、タブローは下から上への真理保存性を満たしているという。

例えば、A_1 と A_2 が共に真なら、それらを得るために $\land$ 規則を適用した $A_1 \land A_2$ も真となり、A_1 と A_2 のどちらか少なくとも一方が真なら、それらを得るために $\lor$ 規則を適用した $A_1 \lor A_2$ も真となる。

$$
\begin{array}{c}
A_1 \land A_2 \\
\vdots \\
A_1 \\
A_2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
A_1 \lor A_2 \\
\vdots \\
A_1 \quad A_2
\end{array}
$$

$\land$ 規則と $\lor$ 規則以外の規則もこの二つの真理保存性を満たしているということは、次のようにして確かめられる。

- まず、ド・モルガンの法則（§ 1.5 を参照せよ）から $\neg(A_1 \land A_2)$ は $\neg A_1 \lor \neg A_2$ と同じ意味をもつので、$\neg\land$ 規則は $\lor$ 規則に還元される。また、再びド・モルガンの法則から $\neg(A_1 \lor A_2)$ は $\neg A_1 \land \neg A_2$ と同じ意味をもつので、$\neg\lor$ 規則は $\land$ 規則に還元される。よって、両者はそれぞれ二つの真理保存性を満たす。

- 次に、実質含意の別表現（§1.5 を参照せよ）から $A_1 \to A_2$ は $\neg A_1 \lor A_2$ と同じ意味をもつので、$\to$ 規則は $\lor$ 規則に還元される。また、実質含意の別表現とド・モルガンの法則から $\neg(A_1 \to A_2)$ は $\neg\neg A_1 \land \neg A_2$ と同じ意味をもつので、$\neg\to$ 規則は $\land$ 規則に還元される。よって、両者はそれぞれ二つの真理保存性を満たす。
- 最後に、二重否定則（§1.5 を参照せよ）から $\neg\neg A_1$ は A_1 と同じ意味をもつので、二重否定除去則は、二つの真理保存性を満たす。

確認問題 12

✍ 任意の命題 A_1, A_2 に対して、A_1 と A_2 が同じ意味になるときのみ $A_1 \leftrightarrow A_2$ が真、それ以外の場合は偽となるように、記号 $\leftrightarrow$ を定義する。このとき、二つの真理保存性を満たすように $\leftrightarrow$ 規則および $\neg\leftrightarrow$ 規則を定義せよ。

§2.2　タブローの描き方

命題論理のタブローの枝が完成するとは、その枝に現われるどの命題にもタブローの規則が可能な限り適用されていることを言い、命題論理のタブローが完成するとは、そのタブローの全ての枝が完成することをいう。

では、実際に §2.1 で述べた規則を用いてタブローを完成させてみよう。例えば、$\neg(A \land B) \land \neg C$ のタブローは、次のような手順で描くことができる。まず、$\neg(A \land B) \land \neg C$ に $\land$ 規則を適用することで、$\neg(A \land B)$ と $\neg C$ を縦に並べる。次に、$\neg(A \land B)$ に $\neg\land$ 規則を適用することで、$\neg A$ と $\neg B$ を横に並べる。

$$
\begin{array}{c}
\neg(A \land B) \land \neg C \\
| \\
\neg(A \land B) \\
\neg C \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg A \qquad \neg B
\end{array}
$$

これ以上タブローの規則を適用することはできないので、これでタブローは完成した。この場合、$\neg C$ が $\neg\land$ 規則の点線部分に相当する。つまり、$\neg\land$ 規則は $\neg C$ を挟んで遠隔的に適用されている。このように、タブローの規則が遠隔的に適用される場合には、どれが適用された命題で、どれがその結果として得られた命題なのかが分かりにくいので、次の図のように、その二つの命題を曲線で結ぶことにする。

$$
\begin{array}{c}
\neg(A \land B) \land \neg C \\
| \\
\neg(A \land B) \\
\neg C \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg A \qquad \neg B
\end{array}
$$

他の例もみてみよう。例えば、$\neg(A \lor B) \land C$ のタブローは、次のような手順で描くことができる。まず、$\neg(A \lor B) \land C$ に $\land$ 規則を適用することで、$\neg(A \lor B)$ と C を縦に並べる。次に、$\neg(A \lor B)$ に $\neg\lor$ 規則を適用することで、$\neg A$ と $\neg B$ を縦に並べる。

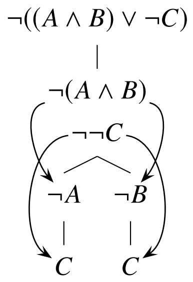
$$
\begin{array}{c}
\neg(A \lor B) \land C \\
| \\
\neg(A \lor B) \\
C \\
| \\
\neg A \\
\neg B
\end{array}
$$

これ以上タブローの規則を適用することはできないので、これでタブローは完成した。

タブローを描くにあたって、気をつけなければならないことが二つ

ある。

第一に、枝分かれする前の命題に規則を適用するなら、分かれたそれぞれの枝をその規則によって伸ばさなければならない。例えば、$\neg((A \wedge B) \vee \neg C)$ のタブローは次のようになる。

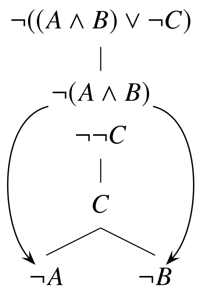


このように、$\neg\neg C$ に対して二重否定除去則を適用することで、$\neg A$ と $\neg B$ のそれぞれから C を葉とする枝が伸びる。

<u>タブローを描くときの注意点 1</u>

枝分かれする前の命題に規則を適用するなら、分かれたそれぞれの枝をその規則によって伸ばさなければならない。

第二に、タブローの規則は、どの順番で適用してもよい。例えば、$\neg((A \wedge B) \vee \neg C)$ のタブローは次のように描くこともできる。



つまり、先に $\neg(A \wedge B)$ に $\neg\wedge$ 規則を適用し、その後で $\neg\neg C$ に二重否定除去則を適用するか、その順序を逆にするか、ということは自由に決めてよ

い。ただし、枝分かれしない規則（この場合は、二重否定除去則）を先に適用したほうが楽にタブローを描けるので、そうすることを推奨する。

タブローを描くときの注意点 2

タブローの規則は、どの順番で適用してもよい。ただし、枝分かれしない規則を先に適用したほうが楽にタブローを描ける。

確認問題 13

✍ 次の命題のタブローをそれぞれ描け。

(1) $\neg(A \lor (A \to \neg B))$

(2) $(\neg A \land B) \land (A \to B)$

(3) $\neg((A \lor B \to \neg(C \lor D)) \to A \lor C)$

§ 2.3　タブローによる反例の発見

§ 1.6 では、真理値表を用いて論証の妥当かどうかを判定する方法を学んだ。しかし、タブローを用いれば、より楽に判定できる。

まずは、論証が妥当ではないということをタブローによって示してみよう。例えば、$(A \to B) \not\models A$ となるということを示すためには、$(A \to B) \to A$ が恒真ではないということを示せばよい。そのために、$(A \to B) \to A$ は偽となる場合があるということを示す。なぜなら、もしも偽となることがないのであれば、それは恒真になるということであり、論証は妥当になってしまうからである。このような、命題が偽となる場合のことをその命題の反例という。$(A \to B) \to A$ の反例を見つけるために、それを否定した $\neg((A \to B) \to A)$ のタブローを描いてみよう。

$$
\begin{array}{c}
\neg((A \to B) \to A) \\
| \\
A \to B \\
\neg A \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg A \qquad B
\end{array}
$$

§ 2.1 で確認したように、全てのタブローの規則は**下から上への**真理保存性を満たすように定められていたので、このタブローから、$\neg A$ と B のどちらか少なくとも一方が真なら $A \to B$ は真となるので、$\neg((A \to B) \to A)$ も真、つまり $(A \to B) \to A$ は偽となることが分かる。

よって、次の二通りの場合が反例になる。

(i) A が偽となる。（B は真でも偽でもよい）
(ii) A が偽かつ B が真となる。

反例 (i) は、$\neg A$ を葉とする枝、反例 (ii) は、B を葉とする枝に注目することで得られる。しかし、(i) と (ii) には重複があるので、重複がないように分けると次のようになる。

(i) A と B は共に偽となる。
(ii) A が偽かつ B が真となる。

このことは、真理値表によって確かめることもできる。$(A \to B) \to A$ の真理値表は下の表 2.1 のようになる。この表によれば、$(A \to B) \to A$ が偽になるのは、確かに A と B が共に偽となる場合と A が偽かつ B が真となる場合の二通りとなっている。

このように、タブローの方法では 4 個の命題を含む表を描くだけでよかったが、真理値表の方法では $4 \times 4 = 16$ 個の真理値を含む表を書かなければならないので、タブローを用いた方が楽に反例を見つけることができる。しかも、原子命題の種類がさらに増えれば、その労力の差は圧倒的なものとなる。タブローの方法と真理値表の方法でこれほどまでの労力の差が生まれるのは、前者は目的の命題を偽にする場合のみを効率的

表 2.1: $(A \to B) \to A$ の真理値表

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

に調べるのに対して、後者は全ての可能性をしらみ潰しに調べるからである。

他の例もみてみよう。例えば、$\neg(A \wedge B) \not\models \neg B$ となるということを示すためには、$\neg(A \wedge B) \to \neg B$ が偽となる場合があるということを示せばよい。そこで、それを否定した $\neg(\neg(A \wedge B) \to \neg B)$ のタブローを描いてみると次のようになる。

$$\neg(\neg(A \wedge B) \to \neg B)$$
$$|$$
$$\neg(A \wedge B)$$
$$\neg\neg B$$
$$|$$
$$B$$
$$\neg A \qquad \neg B$$

先ほどの例と同じように考えてみると、次の二通りの場合が反例になる。

(i) A が偽かつ B が真となる。
(ii) B が真かつ偽となる。（A は真でも偽でもよい）

しかし、B はそれが命題である限り真か偽のどちらか一方に定まるので、B が真かつ偽となるということはない。よって、反例は A が偽かつ B が真となる場合のみである。

このように、原子命題 A とその否定 $\neg A$（この二つの形をした命題のこ

とをそれぞれリテラルと呼ぶ）が、ある枝に同時に現われるとき、その枝は閉じるといい、✗ を付けることにする。例えば、$\neg(\neg(A \wedge B) \to \neg B)$ のタブローは次のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg(\neg(A \wedge B) \to \neg B) & \\
 & | & \\
 & \neg(A \wedge B) & \\
 & \neg\neg B & \\
 & | & \\
 & B & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
\neg A & & \neg B \\
 & & ✗
\end{array}
$$

特に、命題論理のタブローの**全て**の枝が閉じるとき、そのタブローは閉じるという。また、命題論理のタブローの枝が開くとは、その枝が完成している上に閉じていないことをいう。特に、命題論理のタブローの**ある**枝が開くとき、そのタブローは開くという。

タブローによる反例の発見手順

(1) $A_1, \ldots, A_n \not\models A_{n+1}$ となるということを示したいとき、それを $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1}$ という命題に変換する。

(2) その命題を否定した $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1})$ のタブローを描く。

(3) そのタブローの**開い**た枝を一本だけ自由に選ぶ。その枝に現われる全てのリテラルを確認し、A という形のリテラルが現れるなら A を真、$\neg A$ という形のリテラルが現れるなら A を偽とすることで反例が得られる。

確認問題 14

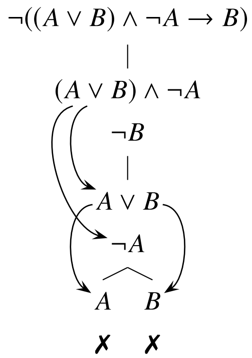
✍ タブローを用いて**全て**の反例を見つけた上で、次の二つを示せ。

(1) $A \vee B \vee \neg A \not\models B$

(2) $\neg(A \wedge \neg B) \not\models \neg A \wedge B$

§2.4　タブローによる妥当性の証明

次に、論証の妥当性をタブローによって示してみよう。例えば、§1.7 によれば、選言的三段論法は $A \vee B, \neg A \models B$ という形をしていた。そこで、$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ が恒真になるということを示そう。まずは、タブローによって反例を探したときと同じように、$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ を否定した $\neg((A \vee B) \wedge \neg A \to B)$ のタブローを描いてみると次のようになる。



すると、このようにタブローは閉じる。全てのタブローの規則は上から下への真理保存性を満たすように定められていたので、このタブローから、$\neg((A \vee B) \wedge \neg A \to B)$ が真なら A を葉とする枝に現われている全ての命題が真となるか、B を葉とする枝に現われている全ての命題が真になる。よって、前者の場合には A と $\neg A$ が、後者の場合には B と $\neg B$ が同時に真になる。しかし、A が真なら $\neg A$ は偽、$\neg A$ が真なら A は偽、B が真なら $\neg B$ は偽、$\neg B$ が真なら B は偽となるので、いずれの場合も起こりえない。よって、$\neg((A \vee B) \wedge \neg A \to B)$ が真になることはないので、$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ が偽になることはない。ということは、$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ は恒真になるので、選言的三段論法は確かに妥当に

なっている。

このことは、真理値表によって確かめることもできる。$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ の真理値表は下の表 2.2 のようになるので、確かに恒真になっている。

表 2.2: $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge \neg A$	$(A \vee B) \wedge \neg A \to B$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

以上の内容を §2.3 の内容と組み合わせれば、論証が妥当かどうかをタブローによって判定する方法が得られる。

重要!! **命題論理のタブローによる論証の分析手順**

(1) $A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} への論証を分析したいとき、それを $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1}$ という命題に変換する。

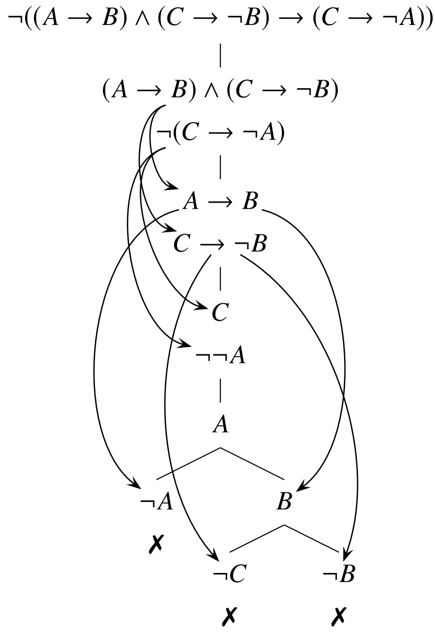
(2) その命題を否定した $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1})$ のタブローを描く。

(3) (i) そのタブローのある枝が開けば、論証は妥当ではない。そのタブローの開いた枝を一本だけ自由に選ぶ。その枝に現われる全てのリテラルを確認し、A という形のリテラルが現れるなら A を真、$\neg A$ という形のリテラルが現れるなら A を偽とすることで反例が得られる。

(ii) そのタブローが閉じれば、論証は妥当である。

例えば、「君が勉強するなら、君は試験に合格する。君が酒を飲むなら、君は試験に合格しない。従って、君が酒を飲むなら、君は勉強しない」という論証を分析してみよう。A を「君は勉強する」、B を「君は試験に合

格する」、C を「君は酒を飲む」とすると、$A \to B, C \to \neg B$ から $C \to \neg A$ への論証となるので、$\neg((A \to B) \wedge (C \to \neg B) \to (C \to \neg A))$ のタブローを描くと次のようになる。



すると、このようにタブローは閉じるので、$A \to B, C \to \neg B \models C \to \neg A$ となる。

確認問題 15

✍ 次の二つをタブローによって示せ。

(1) $A \to B, B \to C \models A \to C$（仮言的三段論法）

(2) $A \to B, C \to D, A \vee C \models B \vee D$（構成的両刀論法）

確認問題 16

✍ 次の二つの論証が妥当かどうかをタブローを用いて判定せよ。

(1) 原因があるなら結果もある。因果関係がないなら原因もない。ゆえに、結果があるなら因果関係もある。

(2) 善人がいるなら悪はない。悪人がいるなら善はない。善人または悪人がいる。従って、悪があるか善があるかのどちらか少なくとも一方である。ただし、善人と悪人は同時に存在し得るものとする。

§2.5　命題論理のタブローの健全性と完全性

タブローを用いる方法と真理値表を用いる方法は、論理式の妥当性について、同じ判定結果を出すということをいくつかの具体例についてみてきた。しかし、一般にそれらの結果が一致するということは、まだ示されていない。そのことを示すためには、任意の命題 A_0 に対して、次の二つを示せばよい。

(a) $\neg A_0$ のタブローが閉じるなら A_0 は恒真になる。

(b) A_0 が恒真なら $\neg A_0$ のタブローは閉じる。

(a) をタブローの健全性、(b) をタブローの完全性という。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\neg A_0 \text{ のタブローが閉じる}} \arrow[r, bend left, "\textbf{健全性}"] & \boxed{A_0 \text{ は恒真になる}} \arrow[l, bend left, "\textbf{完全性}"]
\end{tikzcd}$$

つまり、健全性と完全性は、タブローという図によって命題が恒真かどうかを正しく判定できるということの保証を与えている。

まずは、タブローの健全性から示そう。健全性を示すために、対偶「A_0 が恒真ではないなら $\neg A_0$ のタブローは開く」を示す。A_0 が恒真ではないなら A_0 の反例が存在する。つまり、$\neg A_0$ は真になり得る。よって、タブローの**上から下への**真理保存性から、$\neg A_0$ が真なら $\neg A_0$ のタブローのあ

る完成した枝に現われる全ての命題も真になる。このとき、もしもその枝に原子命題 A とその否定 $\neg A$ が同時に現れれば、両者は共に真となるはずだが、A が真なら $\neg A$ は偽で、$\neg A$ が真なら A は偽になるはずなので、そのようなことは起こりえない。よって、その枝に A と $\neg A$ が同時に現われることはない。つまり、その枝は開く。

次に、タブローの完全性を示す。完全性を示すために、対偶「$\neg A_0$ のタブローが開くなら A_0 は恒真ではない」を示す。$\neg A_0$ のタブローが開くなら、ある開いた枝が存在するので、その枝に現われる全てのリテラルを確認し、A という形のリテラルが現れるなら A を真、$\neg A$ という形のリテラルが現れるなら A を偽とする。このとき、タブローの**下から上への**真理保存性から、その開いた枝に現われる全ての命題は真になる。よって、その枝の根にある $\neg A_0$ も真になる。つまり、A_0 には反例がある。従って、A_0 は恒真ではない。

このように、健全性を示す過程では**上から下への**真理保存性が、完全性を示す過程では**下から上への**真理保存性が本質的な役割を果たしている。全てのタブローの規則は、この二つの真理保存性を満たすように定められていたので、言い換えれば、実はタブローが健全性と完全性を満たすようにタブローの規則を定めていたということになる。

健全性と完全性は論理に関する性質である。このように、論理の性質を示すために用いた「論理」のことをメタ論理といい、これまで対象にしてきた論理（対象論理）とは区別する。メタ論理は、いわば元々の論理よりも一つ上の段階の論理になっている。

確認問題 17

✍ A_1, A_2 を任意の命題とする。このとき、常に正しい主張を次の選択肢から**全て**選べ。

① $A_1 \vee A_2$ のタブローが閉じることがないなら $\neg(A_1 \vee A_2)$ は恒真である。

② $\neg(A_1 \wedge A_2)$ が恒真ではないなら $A_1 \wedge A_2$ のタブローは閉じる。

③ $\neg(A_1 \lor A_2)$ が恒真ではないなら $\neg A_1 \land \neg A_2$ のタブローが閉じることはない。

④ $A_1 \land A_2$ のタブローが閉じることがないなら $\neg A_1 \lor \neg A_2$ は恒真ではない。

演習問題

1 次の二つの問いに答えよ。

(1) タブローを用いて $(\neg A \to B) \to (A \land C)$ の反例が全部で何通りあるのか求めよ。

(2) (1) で求めた反例のみを全ての反例とする命題で、$(\neg A \to B) \to (A \land C)$ と同じ意味にならないようなものは存在するのだろうか。存在するならその具体例を挙げ、存在しないならその理由を説明せよ。

2 $X \land A, X \lor A \models B \land \neg Y$ となるような X と Y の組は全部で何通りあるか答えよ。ただし、X と Y はそれぞれ $A, B, \neg A, \neg B$ の内のいずれかとする。

3 K さんは、次のような手順によって論証が妥当かどうかを判定できると考えた。

(1) $A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} への論証を分析したいとき、それを $A_1 \land \cdots \land A_n \to A_{n+1}$ という命題に変換する。

(2) $A_1 \land \cdots \land A_n \to A_{n+1}$ のタブローを描く。

(3) (i) そのタブローのある枝が開けば、論証は妥当である。

(ii) そのタブローが閉じれば、論証は妥当ではない。

K さんが考えた手順では、論証が妥当かどうかを正しく判定できないのはなぜか。理由を述べよ。

4 A_1, A_2 を任意の命題とする。A_1 と A_2 が共に真となるときのみ

$A_1 \uparrow A_2$ が偽、それ以外の場合は真となるように、記号 $\uparrow$ を定義する。このとき、上から下への真理保存性と下から上への真理保存性を満たすように $\uparrow$ 規則および $\neg\uparrow$ 規則を定義すると、次のようになる。

$\boxed{\uparrow\ \text{規則}}$

$$A_1 \uparrow A_2$$
$$\vdots$$

A_1	$\neg A_1$	$\neg A_1$
$\neg A_2$	A_2	$\neg A_2$

$\boxed{\neg\uparrow\ \text{規則}}$

$$\neg(A_1 \uparrow A_2)$$
$$\vdots$$
$$A_1$$
$$A_2$$

この二つの規則を用いて、$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)$ と $(A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C)) \uparrow (A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C))$ が同じ意味になることを示せ。

$\boxed{5}$ A_0 を任意の命題とする。A_0 のタブローと $\neg A_0$ のタブローが共に閉じることはない、ということを次のようにして示す。

> A_0 のタブローと $\neg A_0$ のタブローが共に $\boxed{\text{ア}}$ と仮定する。$\neg A_0$ のタブローは $\boxed{\text{ア}}$ ので、タブローの $\boxed{\text{イ}}$ から、A_0 は恒真になる。よって、$\boxed{\text{ウ}}$ は恒真ではないので、$\boxed{\text{ウ}}$ には反例がある。つまり、$\neg\neg A_0$ のタブローは開く。従って、A_0 のタブローが $\boxed{\text{ア}}$ ことはないので、仮定に反する。

空欄に当てはまる言葉として最も適切なものを次の選択肢の中から選べ。ただし、同じ片仮名の空欄には同じ選択肢が入るものとする。

① $\neg A_0$	② 恒真になる	③ A_0
④ 開く	⑤ 任意の命題	⑥ 完全性
⑦ 健全性	⑧ 無矛盾性	⑨ 閉じる

第3章

古典述語論理の意味論

第 1 章と第 2 章では、原子命題を最も基礎的な単位として扱った。例えば、§1.3 で述べたように、命題論理では「私」と「猫が好きだ」の間にある関係性を表現することができないので、「私は猫が好きだ」をそれ以上分析することはできない。そこで、第 3 章では、主語と述語の間の関係を分析することができる論理として、述語論理と呼ばれる論理を学ぶ。この論理を用いれば、「全ての〜は ··· だ」や「ある〜は ··· だ」といった文を扱えるようになる。

§3.1　個体と固有名

主語を扱うためには、主語として扱われる対象を規定する必要がある。そこで、そのような対象のことを個体といい、d という記号で表わす。また、複数の個体が必要なときには、それぞれ $d_1, d_2, d_3, \ldots$ と記号化する。個体は生物であっても非生物であってもよい。さらに、個体からなる非空集合のことを個体領域といい、D という記号で表わす。個体領域は、必ずしも全ての個体からなる必要はない。

個体は文の構成要素ではない。例えば、「私は猫が好きだ」という文において、私そのものはどこにも現れない。現れているのは、私という個体を指示する指標詞「私」だけである。あるいは、「アリストテレスは猫が好きだ」という文においても、現れているのは、アリストテレスという個体を指示する名前「アリストテレス」だけである。指標詞と名前は、その指示対象が文以外の要因によって変化するかどうかという点において異なっている。つまり、「私は猫が好きだ」という文における指標詞「私」が具体的に誰のことを指すのかは、その文を読んだり発話したりする人

によって異なるが、「アリストテレスは猫が好きだ」という文における名前「アリストテレス」は、その文を読んだり発話したりする人が誰であろうとアリストテレスを指示する。このように、文以外の要因が絡んでくる指標詞の扱いは難解なので、以下では名前のみを扱う。

名前には、固有名と一般名の二種類がある。固有名は、「アリストテレスは猫が好きだ」という文における「アリストテレス」のように、ある特定の個体を指示する。一方で、一般名は、「全ての人間は猫が好きだ」という文における「人間」のように、特定の個体を指示しない。

個体を指示する表現の分類

$$\begin{cases} \text{指標詞 （例）「これ」「それ」「ここ」「私」「あなた」} \\ \text{名前} \begin{cases} \text{固有名 （例）「アリストテレス」「富士山」「地球」} \\ \text{一般名 （例）「人間」「山」「惑星」} \end{cases} \end{cases}$$

指標詞と名前だけが個体を指示する表現というわけではない。例えば、「アメリカの初代大統領」（ジョージ・ワシントンを指す）は、個体を一意に指示している。このような記述のことを確定記述という。指標詞と同じく、確定記述の扱いも簡単ではないので、以下では扱わないことにする。ただし、指標詞と確定記述は、あくまでも話を簡単にするためにここでは扱わないというだけであって、論理学で扱わない（扱えない）わけではない。

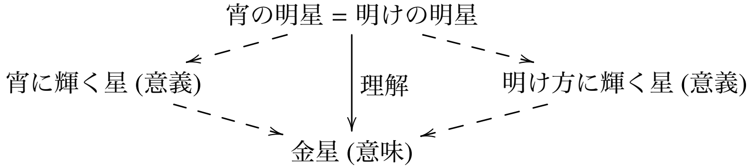
以下では、固有名を c という記号で表わす。また、複数の固有名が必要なときには、それぞれ $c_1, c_2, c_3, \dots$ と記号化する。これらの記号のことを個体定項という。固有名が個体を指示したように、個体定項 c は個体（の記号）d を指示するものとする。そこで、c に $d \in D$ を割り当てるような関数 V を定義する。この関数 V のことを指示子という。V は、次の条件を満たすものとする。

> 任意の c に対して、$d = V(c)$ となるような $d \in D$ が存在する。

つまり、固有名は必ず何らかの個体を指示するものとする。

命題の意味とは、その真偽のことだった。では、固有名の意味とは何だろうか。述語論理では、それは固有名の指示対象のことであると考える。よって、「アリストテレス」を c と記号化すれば、その意味は $V(c)$ と記号化される。実際、「『アリストテレス』の意味は何ですか」と問われたら、実物のアリストテレスを指差して、「この人のことです」と答えるだろう。

しかし、命題論理における命題の「意味」の用法が日常的な「意味」の用法とは異なるように、述語論理における固有名の「意味」の用法も日常のそれとは異なる。例えば、「宵の明星」と「明けの明星」はどちらも金星のことを指す固有名なので、両者の意味は同じになるはずだが、直観的にはそれらの意味は異なる。なぜなら、「宵の明星」には「宵に輝く星」という情報が付加されており、「明けの明星」には「明け方に輝く星」という情報が付加されているからである。しかし、これらの付加された情報は、固有名の意義であって、「意味」とは異なると考えることもできる。つまり、「宵の明星」と「明けの明星」の意味（指示対象）は同じだが、それらの意義（指示対象の与えられ方）は異なる。



このように言葉の使い方を決めれば、述語論理における「意味」の用法を保持しながら、それが反映しきれなかった日常的な「意味」の用法の部分についても議論ができるようになる。ただし、第 3 章の主題は述語論理の意味論なので、意義についてこれ以上は扱わないことにする。詳しく知りたければ、哲学者フレーゲの論文「意義と意味について (Über Sinn und Bedeutung)」およびその関連文献を参照せよ。

確認問題 18

✍ 次の文字列はそれぞれ固有名だろうか。固有名なら、個体定項と指示子を用いて、その意味を記号化せよ。

(1)「馬」

(2)「東京」

(3)「あの人」

(4)「徳川家康」

§3.2　量化子による記号化

個体定項だけでは文を記号化することはできない。そこで、述語を表わす記号 P を導入する。また、複数の述語が必要なときには、それぞれ $P_1, P_2, P_3, \ldots$ と記号化する。これらの記号のことを述語記号という。例えば、c を「アリストテレス」、P を「〜は猫が好きだ」とすると、「アリストテレスは猫が好きだ」は $P(c)$ と記号化される。

このようにして、固有名を含む文を記号化することができた。しかし、「全ての人間は猫が好きだ」というような、固有名の代わりに一般名を含む文もある。そこで、そのような文を記号化するために、新たに個体変項および量化子を導入する。個体変項は様々な個体定項になり得る記号で、個体定項を定数とすれば、個体定項は変数のように振る舞う。個体定項と個体変項のことを合わせて項という。しばらくの間は、一種類の個体変項 x のみを考える。二種類以上の個体変項 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ については、§3.7 で扱う。

述語論理で扱う量化子には、全称量化子 ∀ と存在量化子 ∃ の二種類がある。全称量化子は、「全ての（任意の）個体に対して $\cdots$」を表し、存在量化子は、「ある個体に対して $\cdots$（ある個体が存在して、それは $\cdots$）」を表わす。∀ は、All の頭文字 A の上下を反転させた記号、∃ は Exist の

頭文字 E の左右を反転させた記号になっている。

量化子が言及しているのは、**個体**であって**個体定項**ではない、という点に注意せよ。述語論理に慣れていない内は、個体と個体定項を混同してしまいがちなので、両者を意識的に区別する習慣をつけておくとよい。

量化子は、必ず $(\forall x)$ あるいは $(\exists x)$ という形で、個体変項 x と共に現われる。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は猫が好きだ」とすると、「全ての人間は猫が好きだ」は $(\forall x)P(x)$ と記号化される。また、「ある人は猫が好きだ」は $(\exists x)P(x)$ と記号化される。

量化子と論理結合子を組み合わせて記号化することもできる。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、$P_1(x)$ を「x は論理学が得意である」、$P_2(x)$ を「x は数学が得意である」とすると、「どんな人も、論理学と数学が得意だ」は、「全ての人は『論理学が好きだ』かつ『数学が好きだ』」ということなので、

$$(\forall x)(P_1(x) \land P_2(x))$$

と記号化される。一方で、「どんな人も論理学が得意だし、どんな人も数学が得意だ」は、「『全ての人は論理学が好きだ』かつ『全ての人は数学が好きだ』」ということなので、

$$(\forall x)(P_1(x)) \land (\forall x)(P_2(x))$$

と記号化される。前者は $(\forall x)$ が $P_1(x) \land P_2(x)$ に掛かっているが、後者は $(\forall x)$ が $P_1(x)$ と $P_2(x)$ のそれぞれに掛かっている。このように、$(\forall x)$ や $(\exists x)$ が掛かっている範囲のことを作用域という。

$$(\forall x)(\underline{P_1(x) \land P_2(x)}) \qquad (\forall x)(\underline{P_1(x)}) \land (\forall x)(\underline{P_2(x)})$$

$\forall$ と $\land$ の組み合わせの場合には、作用域が異なっていても、直観的には文意は変わらない。つまり、「どんな人も、論理学と数学が得意だ」と「どんな人も論理学が得意だし、どんな人も数学が得意だ」は、それぞれ互いの言い換えになっている。

しかし、∃ と ∧ の組み合わせの場合には事情が異なる。例えば、「論理学と数学が得意な人がいる」は、「ある人は『論理学が好きだ』かつ『数学が好きだ』」ということなので、

$$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$$

と記号化されるが、「論理学が得意な人や数学が得意な人がいる」は、「『ある人は論理学が好きだ』かつ『ある人は数学が好きだ』」ということなので、

$$(\exists x)(P_1(x)) \wedge (\exists x)(P_2(x))$$

と記号化される。前者は、ある一人の人間は論理学と数学が得意だということを表しているが、後者は、論理学が好きな人と数学が好きな人が異なっていてもよい。よって、両者はそれぞれ互いの言い換えになっていない。このように、作用域が異なれば文意が異なる場合もあるので、作用域がどこからどこまでなのかということに注意しながら記号化しなければならない。

命題論理 (§ 1.3) において論理結合子の優先順位を定めたように、述語論理においても論理結合子と量化子の優先順位を次のように定める。

❶ $\neg, \forall, \exists$　　❷ $\wedge, \vee$　　❸ $\rightarrow$

よって、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ の括弧を省略することはできないが、$(\forall x)(P_1(x)) \wedge (\forall x)(P_2(x))$ の括弧は $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ と省略できる。特に、∀ と ∃ については、「それらの作用域は、括弧がない限り最も狭いものが常に選ばれる」と考えてもよい。

このとき、❷ のグループについては、優先順位が同じなら括弧を省略することはできないが、❶ のグループについては、できるものとする。例えば、$P(c_1) \wedge P(c_2) \vee P(c_3)$ は $(P(c_1) \wedge P(c_2)) \vee P(c_3)$ と $P(c_1) \wedge (P(c_2) \vee P(c_3))$ のどちらを表わすのかが不明確だが、$(\exists x)\neg P(x)$ は $(\exists x)(\neg(P(x)))$ 以外を表しえないので、括弧を省略してもよい。

確認問題 19

✍ 個体領域を明示した上で、量化子を用いて次の文をそれぞれ記号化せよ。

(1) 犬好きの人がいる。

(2) 人は犬が好きだ。

(3) あらゆる植物は生物でもある。

(4) ある物が存在して、それは赤い。

確認問題 20

✍ 量化子を用いて次の文をそれぞれ記号化せよ。

(1)「どんな人も論理学が得意だ、というわけではない」

(2)「ある人は論理学が得意ではない」

(3)「どんな人も、論理学または数学が得意だ」

(4)「論理学が得意な人がいたり、数学が得意な人がいたりする」

(5)「どんな人も論理学が得意なら、どんな人も数学が得意だ」

(6)「論理学が得意なら数学も得意な人がいる」

§3.3　閉論理式の真理値 I

命題論理では、命題、すなわち正しいかどうかを明確に判定できる主張や判断のみを扱った。しかし、述語論理では、命題ではないものも扱う。それは、論理式と呼ばれる概念である。論理式は、次のように定義される。

(1) t を項、P を述語記号とする。このとき、$P(t)$ のことを原子論理式という。原子論理式は論理式である。

(2) α と β が論理式なら $\neg\alpha, \alpha \land \beta, \alpha \lor \beta, \alpha \to \beta$ も論理式になる。

(3) α が論理式なら $(\forall x)\alpha$, $(\exists x)\alpha$ も論理式になる。

例えば、$P_1(x) \land \neg(\forall x)P_2(c)$ が論理式であるということは、次のようにして確認できる。まず、論理式の定義 (1) から $P_2(c)$ は論理式である。よって、(3) から $(\forall x)P_2(c)$ も論理式になるので、(2) から $\neg(\forall x)P_2(c)$ も論理式になる。このとき、(1) から $P_1(x)$ は論理式なので、(2) から $P_1(x) \land \neg(\forall x)P_2(c)$ も論理式になる。

論理式は、正しいかどうかを明確に判定できないことがある。例えば、$P(x)$ を「x は猫が好きだ」という原子論理式とすると、$P(x)$ は誰について「猫が好きだ」と主張しているのかが不明確なので、正しいかどうかを判定することはできない。一方で、個体領域が全ての人間からなるとき、$(\forall x)P(x)$ は「全ての人間は猫が好きだ」を表わす論理式だが、それが正しいかどうかを判定することはできる。原理的には、全ての人間に対して「あなたは猫が好きですか」という質問をしていき、「好きではない」と答える人が一人もいなければ「全ての人間は猫が好きだ」は正しいが、「好きではない」と答える人が一人でもいれば正しくない。

$(\forall x)P(x)$ のように、$(\forall x)$ もしくは $(\exists x)$ の作用域内に、他の $(\forall x)$ もしくは $(\exists x)$ の作用域内にはない x があるとき、その x のことを束縛変項という。また、束縛変項ではない個体変項のことを自由変項という。例えば、$(\forall x)(P_1(x) \land (\exists x)P_2(x))$ という論理式において、$P_1(x)$ の x は $(\forall x)$ によって束縛されているが、$P_2(x)$ の x は $(\exists x)$ によって束縛されている。

$$(\forall x)(P_1(x) \land (\exists x)P_2(x))$$

論理式 φ に現われる全ての個体変項が束縛されているとき、φ を閉論理式という。特に、$P(c)$ のような、個体変項が一切現れない論理式も閉論理式と呼ぶことにする。

閉論理式は、それが表わす主張が正しいかどうかを必ず判定できる。そこで、閉論理式が正しいとき、その閉論理式は真であるといい、閉論理式が正しくないとき、その閉論理式は偽であるという。また、閉論理式の真

偽のことを閉論理式の意味という。しかし、「閉論理式が正しいとき」という表現は曖昧であり、閉論理式の正しさとは何なのかが明確ではない。そこで、どのようなときに閉論理式は真になるのか、ということを次に定めるが、その前に、まずはそのための準備を行う。

述語記号 P が表わす述語（性質）を満たすような個体 $d \in D$ 全体からなる集合を P が表わす述語の外延といい、$V(P)$ と記号化する。外延は述語の意味に相当する。ここで、これまでに登場した様々な「意味」をまとめておくと、次のようになる。

様々な「意味」

「意味」
- 命題の意味：命題の真偽
- 固有名の意味：固有名の指示対象
- 閉論理式の意味：閉論理式の真偽
- 述語の意味：述語の外延

これで準備は整った。以下では、閉論理式が真であるということを T と記号化し、偽であるということを F と記号化する。この二つの記号のことを閉論理式の真理値という。

まず、c が P であるとは、P が表わす述語（性質）を c の意味（指示対象）$V(c)$ が満たしているということなので、原子論理式でもある閉論理式 $P(c)$ の真理値を次のように定める。

$P(c)$ の真理値の定義

$P(c)$ の真理値は T：$V(c) \in V(P)$
$P(c)$ の真理値は F：$V(c) \notin V(P)$

例えば、D を { 北海道, 東京都, 神奈川県 }, $P_1(x)$ を「x は日本に属する」、$P_2(x)$ を「x は関東地方に属する」、$P_3(x)$ を「x は日本の首都である」、$P_4(x)$

を「x は九州地方に属する」とすると、$V(P_1)$ は { 北海道, 東京都, 神奈川県 }, $V(P_2)$ は { 東京都, 神奈川県 }, $V(P_3)$ は { 東京都 }, $V(P_4)$ は空集合 $\emptyset$ となる。このとき、c_1 を「北海道」、c_2 を「東京都」、c_3 を「神奈川県」とすると、

$$\begin{array}{lll} V(c_1) \in V(P_1), & V(c_2) \in V(P_1), & V(c_3) \in V(P_1), \\ V(c_1) \notin V(P_2), & V(c_2) \in V(P_2), & V(c_3) \in V(P_2), \\ V(c_1) \notin V(P_3), & V(c_2) \in V(P_3), & V(c_3) \notin V(P_3), \\ V(c_1) \notin V(P_4), & V(c_2) \notin V(P_4), & V(c_3) \notin V(P_4) \end{array}$$

となるので、$P_1(c_1), P_1(c_2), P_1(c_3), P_2(c_2), P_2(c_3), P_3(c_2)$ の真理値は T となるが、それ以外の閉論理式の真理値は F となる。

次に、$(\forall x)P(x)$ であるとは、P が表わす述語（性質）を全ての個体 $d \in D$ が満たしているということであり、$(\exists x)P(x)$ であるとは、P が表わす述語（性質）をある個体 $d \in D$ が満たしているということなので、$(\forall x)P(x)$ と $(\exists x)P(x)$ の真理値を次のように定める。

$(\forall x)P(x)$ の真理値の定義

$(\forall x)P(x)$ の真理値は T：任意の $d \in D$ に対して $d \in V(P)$
$(\forall x)P(x)$ の真理値は F：ある $d \in D$ に対して $d \notin V(P)$

$(\exists x)P(x)$ の真理値の定義

$(\exists x)P(x)$ の真理値は T：ある $d \in D$ に対して $d \in V(P)$
$(\exists x)P(x)$ の真理値は F：任意の $d \in D$ に対して $d \notin V(P)$

例えば、先ほどの例と同じように $D, P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ を定めると、どの個体 $d \in D$ も日本に属しているので $(\forall x)P_1(x)$ の真理値は T, ある個体 $d \in D$（すなわち、北海道）は関東地方に属していないので $(\forall x)P_2(x)$ の真理値は F, ある個体 $d \in D$（すなわち、東京都）は日本の首

都なので $(\exists x)P_3(x)$ の真理値は T, どの個体 $d \in D$ も九州地方に属していないので $(\exists x)P_4(x)$ の真理値は F となる。

確認問題 21

✍ 閉論理式を次の選択肢から全て選べ。

① $(\forall x)P(x) \vee \neg P(x) \to P(c)$

② $P(c_1) \wedge \neg(P(c_2) \wedge P(c_1))$

③ $(\exists x)\neg P(x) \to P(x) \wedge (\forall x)P(x)$

④ $\neg P(c_1) \to (\forall x)(\neg P(x) \vee P(x))$

確認問題 22

✍ D を正の整数全体からなる集合、$P_1(x)$ を「x は素数である」、$P_2(x)$ を「x は偶数である」とする。このとき、$V(P_1)$ と $V(P_2)$ を明示した上で、$P_1(17)$, $P_2(83)$, $(\forall x)P_1(x)$, $(\exists x)P_2(x)$ の意味をそれぞれ答えよ。

§3.4　閉論理式の真理値 II

§3.3 では、$(\forall x)P(x)$ と $(\exists x)P(x)$ の真理値を定めたが、その定め方は P を x のみが自由変項として現れている一般の論理式 $\varphi(x)$ に置き換えて得られる閉論理式 $(\forall x)\varphi(x)$ と $(\exists x)\varphi(x)$ の場合にそのまま拡張できるわけではない。なぜなら、そのまま拡張すると、例えば $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値は任意の $d \in D$ に対して $d \in V(P_1(x) \to P_2(x))$ となるかどうかによって決まるということになるが、$V(P_1(x) \to P_2(x))$ が定義されていないので、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値を定義したことにならないからである。

そこで、個体 d の代わりに、その個体を指示する個体定項 c を用いる

ことにしよう。つまり、$d = V(c)$ となるような c を用いて $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値を定める。まず、D に属する全ての個体 $d_1, d_2, d_3, \ldots$ に対して、それぞれを指示する個体定項 $c_1, c_2, c_3, \ldots$ を用意する。次に、$P_1(x) \to P_2(x)$ の x に $c_1, c_2, c_3, \ldots$ をそれぞれ代入する。すると、

$$P_1(c_1) \to P_2(c_1), \quad P_1(c_2) \to P_2(c_2), \quad P_1(c_3) \to P_2(c_3), \ldots$$

が得られる。このとき、$P_1(c_1), P_2(c_1), P_1(c_2), \ldots$ の部分を原子命題とみなせば、原子命題が $\to$ によって接続されただけの単なる命題に帰着する。そのような命題の真理値がどうなるか、ということについては命題論理において既に定められており、原子命題とみなした部分は、どれも §3.3 で述べた「$P(c)$ の真理値の定義」を適用できるので、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値を決める方法が与えられた。

以上の内容を §3.3 で使った都道府県の例でみてみよう。既に §3.3 で求めたように、$P_1(c_1)$, $P_1(c_2)$, $P_1(c_3)$, $P_2(c_2)$, $P_2(c_3)$ の真理値は T, $P_2(c_1)$ の真理値は F となるので、$P_1(c_1) \to P_2(c_1)$ の真理値は F, $P_1(c_2) \to P_2(c_2)$ と $P_1(c_3) \to P_2(c_3)$ の真理値は T となる。よって、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値は F となる。このことを真理値表で表せば、下の表 3.1 のようになる。ただし、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ を X とおいた。

表 3.1: $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値表

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_1(x) \to P_2(x)$	X
c_1	T	F	F	
c_2	T	T	T	F
c_3	T	T	T	

同様にして、$(\exists x)(P_3(x) \land \neg P_4(x))$ や $(\forall x)\neg(P_2(x) \land P_3(c_3))$ 真理値を求めることもできる。それぞれの真理値表を描くと、下の表 3.2 と表 3.3 のようになる。ただし、$(\exists x)(P_3(x) \land \neg P_4(x))$ を Y, $(\forall x)\neg(P_2(x) \land P_3(c_3))$ を Z とおいた。

表 3.2: $(\exists x)(P_3(x) \land \neg P_4(x))$ の真理値表

x	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$\neg P_4(x)$	$P_3(x) \land \neg P_4(x)$	Y
c_1	F	F	T	F	
c_2	T	F	T	T	T
c_3	F	F	T	F	

表 3.3: $(\forall x)\neg(P_2(x) \land P_3(c_3))$ の真理値表

x	$P_2(x)$	$P_3(c_3)$	$P_2(x) \land P_3(c_3)$	$\neg(P_2(x) \land P_3(c_3))$	Z
c_1	F	-	F	T	
c_2	T	-	F	T	T
c_3	T	F	F	T	

以上の内容を下にまとめておこう。ただし、$\varphi(x)$ は、x のみが自由変項として現れている論理式、$\varphi[c/x]$ は、$\varphi(x)$ に現われる全ての自由変項 x に c を代入して得られる論理式をそれぞれ表している。

重要!! **閉論理式の真理値の定義**

任意の $d \in D$ に対して、$d = V(c)$ となるような c の存在を仮定する。

(1) $P(c)$ の真理値は T：$V(c) \in V(P)$
$P(c)$ の真理値は F：$V(c) \notin V(P)$

(2) 閉論理式 φ, ψ に対して、命題論理と同じように $\neg\varphi$, $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \to \psi$ の真理値を定める。

(3) $(\forall x)\varphi(x)$ の真理値は T：任意の $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が真
$(\forall x)\varphi(x)$ の真理値は F：ある $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が偽

(4) $(\exists x)\varphi(x)$ の真理値は T：ある $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が真
$(\exists x)\varphi(x)$ の真理値は F：任意の $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が偽

この定義において、c は d によって変化するということに注意せよ。

この定義の冒頭にある条件は、新たに仮定されている。なぜなら、§3.1 で述べたように、任意の c に対して $d = V(c)$ となるような $d \in D$ が存在するということは仮定していたが、任意の $d \in D$ に対して $d = V(c)$ となるような c が存在するということは仮定していなかったからである。つまり、一般には、どの固有名も必ず個体を指示するが、全ての個体が何らかの固有名によって指示されるわけではない。本書では、話を簡単にするために、任意の $d \in D$ に対して、$d = V(c)$ となるような c の存在を常に仮定する。

一般の述語論理で課される仮定 （§3.1 を参照せよ）

任意の c に対して、$d = V(c)$ となるような $d \in D$ が存在する。

本書でのみ課される仮定

任意の $d \in D$ に対して、$d = V(c)$ となるような c が存在する。

「任意の $d \in D$ に対して、$d = V(c)$ となるような c が存在する」ことを仮定すると、例えば実数全体を個体領域として扱うことができなくなる。なぜなら、個体定項 $c_1, c_2, c_3, \ldots$ が正の整数 $1, 2, 3, \ldots$ で添字付けられていることから分かるように、個体定項は高々正の整数と同じくらいの個数（それでも少なくとも無限個はあるが）しかないが、実数全体はそれよりもさらに「多い」ので、いかなる個体定項によっても指示されない個体が存在するからである。このことは、厳密には集合論の言葉を用いて説明しなければならないが、ここでは割愛する。

数学ならともかく、少なくとも日常生活では正の整数の個数よりも「多

い」個数の個体を扱うことはめったにない。そこで、本書では正の整数の個数よりも「多い」個数の個体は扱わないことにする。もしも数学への応用を考えていて、この仮定を課さない一般の述語論理について知りたいのであれば、戸田山和久『論理学をつくる』（名古屋大学出版会、2000年）などを参照せよ。

確認問題 23

✍ D を $\{$ 樋口一葉, 川端康成, 太宰治 $\}$、c_1 を「樋口一葉」、c_2 を「川端康成」、c_3 を「太宰治」、$P_1(x)$ を「x は『たけくらべ』を書いた」、$P_2(x)$ を「x は『伊豆の踊子』を書いた」、$P_3(x)$ を「x は男性である」とする。このとき、真理値表を用いて次の閉論理式の意味をそれぞれ答えよ。

(1) $P_2(c_2) \to (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$

(2) $(\forall x)((P_1(c_1) \lor P_2(c_3)) \land P_3(x))$

(3) $\neg(\exists x)(P_3(x) \land \neg P_3(x))$

(4) $(\forall x)(P_1(x) \to (\exists x)P_3(x))$

§3.5　述語論理の論証

命題論理の場合と同様に、n 個の閉論理式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から閉論理式 φ_{n+1} が導かれるという主張を $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から φ_{n+1} への論証といい、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のそれぞれを前提、φ_{n+1} を結論という。

n 個の命題 $A_1, \ldots, A_n$ から命題 A_{n+1} への論証が妥当であるとは、$A_1 \land \cdots \land A_n \to A_{n+1}$ が常に真になるということだったように、$\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n \to \varphi_{n+1}$ があらゆる解釈（個体領域、固有名の意味、外延の三つ）に対して真になるとき、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から φ_{n+1} への論証は妥当であるということにする。なぜなら、解釈が閉論理式の意味を決めているので、あらゆる解釈の下での閉論理式の意味を調べれば、あらゆる場合の閉論理式の意味を

調べたことになるからである。また、命題論理の場合と同様に、$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から φ_{n+1} を導く論証が妥当であるということを $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi_{n+1}$ と表わし、妥当ではないということを $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$ と表わす。

§3.4 では、解釈が明確に定まっている場合の閉論理式の真理値を真理値表によって求めた。しかし、論証が妥当になるということを示すときには、あらゆる解釈を検討しなければならないので、その全ての場合について真理値表を描かなければならない。命題の場合には、あらゆる原子命題の意味を検討しさえすればよかったので、それが可能だった。しかし、閉論理式の場合には、考慮しなければならない要素が多すぎるので、ほとんど不可能である。よって、述語論理の論証が妥当になるということを示すためには、真理値表を用いずに示さなければならない。

例えば、個体領域が全ての国からなるとき、c_1 を「ロシア」、$P_1(x)$ を「x は共和制だ」、$P_2(x)$ を「x には君主がいない」とすると、「ロシアは共和制だ。全ての共和国には君主がいない。よって、ロシアには君主がいない」は、$P_1(c_1), (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ から $P_2(c_1)$ への論証となる。この論証が妥当になるということを示すためには、$P_1(c_1) \land (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to P_2(c_1)$ が妥当になるということ、すなわち、任意の解釈の下で、$P_1(c_1)$ と $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ が共に真なら $P_2(c_1)$ も真になることを示せばよい。$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ が真であるとは、任意の $d_2 = V(c_2) \in D$ に対して、$P_1(c_2) \to P_2(c_2)$ が真になるということなので、$P_1(c_1) \to P_2(c_1)$ も真になる。このとき、$P_1(c_1)$ が真なので、$P_2(c_1)$ も真になる。

一方で、$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ から φ_{n+1} への論証が妥当ではないということを示すためには、$\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n \to \varphi_{n+1}$ を偽にするような、**ある特定の**解釈を見つければよいので、真理値表を利用できる。

例えば、個体領域が全ての紅茶からなるとき、$P(x)$ を「x は美味しい」とすると、「ある紅茶は美味しい。だから、美味しくないような紅茶はない」は、$(\exists x)P(x)$ から $\neg(\exists x)\neg P(x)$ への論証となる。この論証が妥当ではないということを示すためには、$(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ が妥当ではないということ、すなわち、$(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ を偽にする解釈

があるということを示せばよい。このとき、$D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P) = \{d_1\}$ という解釈を与えれば、下の表 3.4 から分かるように、この解釈は $(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ を偽にする。ただし、$(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ を X とおいた。このように、閉論理式 φ を偽にするような解釈のことを φ の反例という。

表 3.4: $(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ の真理値表

<table>
<tr><th>x</th><th>$P(x)$</th><th>$(\exists x)P(x)$</th><th>$\neg P(x)$</th><th>$(\exists x)\neg P(x)$</th><th>$\neg(\exists x)\neg P(x)$</th><th>X</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>T</td><td rowspan="2">T</td><td>F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>F</td><td>T</td></tr>
</table>

反例を見つけるためには、偽にしたい閉論理式から始めて逆算していけよい。まず、X が偽になるためには、$(\exists x)P(x)$ が真かつ $\neg(\exists x)\neg P(x)$ が偽になる必要がある。このとき、$(\exists x)P(x)$ が真になるためには、$P(c)$ が真になるような c が存在していなければならず、$\neg(\exists x)\neg P(x)$ が偽になるためには、$(\exists x)\neg P(x)$ が真、すなわち $\neg P(c)$ が真になるような c が存在していなければならない。よって、二つの個体定項 c_1, c_2 を用意して、$P(c_1)$ は真（$\neg P(c_1)$ は偽）かつ $\neg P(c_2)$ も真（$P(c_2)$ は偽）となるように解釈を定めればよい。

確認問題 24

✍ 次の二つの論証が妥当かどうかを調べよ。

(1) 全ての物体には形がある。形ある物体は全て変化する。ゆえに、全ての物体は変化する。

(2) 内角の和が二直角よりも大きい三角形がある。内角の和が二直角よりも大きい三角形があるなら、その三角形は球面上にある。従って、ある三角形は球面上にある。

§3.6　同じ意味

二つの命題 A_1 と A_2 が同じ意味であるとは、それらの意味が常に一致するということであったように、任意の解釈の下で、二つの閉論理式 φ と ψ の意味が一致するとき、それらの閉論理式は同じ意味であると定義する。その理由は、述語論理の論証の妥当性を定義したときと同様である。

閉論理式の真理値の定義 (p. 49) によれば、閉論理式 φ, ψ に対して、$\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi$ の真理値は命題論理と同じように定まっている。よって、φ と ψ が同じ意味であるということを示すためには、$\varphi \models \psi$ かつ $\psi \models \varphi$ となることを示せばよい。この戦略に基づいて、二つの閉論理式の意味が同じかどうかを判定していこう。

§3.2 では、直観的には、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ は同じ意味だが、$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x)$ は同じ意味ではない、と述べた。今や私たちは閉論理式の真理値の厳密な定義 (p. 49) を知っているので、本当に同じ意味なのかどうかということを確かめることができる。

(1) $(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ は同じ意味になる。なぜなら、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \models (\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ かつ $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x) \models (\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ となるからである。
- $(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ が真であるとは、任意の $d = V(c) \in D$ に対して、$P_1(c) \wedge P_2(c)$ が真になるということなので、$P_1(c)$ と $P_2(c)$ は共に真となる。よって、$(\forall x)P_1(x)$ と $(\forall x)P_2(x)$ も共に真となるので、$(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ も真となる。従って、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \models (\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ となる。
- $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ が真であるとは、任意の $d_1 = V(c_1) \in D$, $d_2 = V(c_2) \in D$ に対して、$P_1(c_1)$ と $P_2(c_2)$ が共に真となるということなので、$P_1(c_1) \wedge P_2(c_2)$ も真となる。このとき、c_1

と c_2 は共に任意の個体定項なので、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ も真となる。従って、$(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x) \models (\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ となる。

(2) $(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x)$ は同じ意味にならない。なぜなら、$(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \not\models (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ となるからである。

- $D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P_1) = \{d_1\}$, $V(P_2) = \{d_2\}$ という解釈を与えれば、下の表 3.5 から分かるように、この解釈は $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \to (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ を偽にするので、反例になっている。ただし、$(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \to (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ を X とおいた。

表 3.5: $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \to (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ の真理値表

<table>
<tr><th>x</th><th>$P_1(x)$</th><th>$(\exists x)P_1(x)$</th><th>$P_2(x)$</th><th>$(\exists x)P_2(x)$</th><th>$(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x)$</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>T</td><td rowspan="2">T</td><td>F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>F</td><td>T</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x</th><th>$P_1(x) \wedge P_2(x)$</th><th>$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$</th><th>$X$</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>F</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>F</td></tr>
</table>

確認問題 25

✍ 閉論理式の真理値の定義を用いて次の二つの問いに答えよ。

(1) $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ と $(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ は同じ意味だろうか。

(2) $(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ と $(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ は同じ意味だろうか。

§3.7　多項述語論理

これまでは、$P(c)$ や $(\forall x)P(x)$ のように、単一の項に対して定まる記号 P のみを扱ってきた。このような述語記号のみを扱う論理のことを単項述語論理という。しかし、それでは「ソクラテスとクサンティッペは夫婦だ」のような文を表現することができない。例えば、c_1 を「ソクラテス」、c_2 を「クサンティッペ」、$P(x)$ を「x は夫婦だ」としたとき、「ソクラテスとクサンティッペは夫婦だ」を $P(c_1) \wedge P(c_2)$ と記号化するのは誤りである。なぜなら、「夫婦である」という関係は二人の人間に対して適用される関係であって、ソクラテスあるいはクサンティッペのどちらか一方に対してのみ適用される関係ではないからである。つまり、単項述語論理では、「夫婦である」のような、複数の個体の間にある関係性を表わすことができない。

そこで、二種類の個体変項 x_1, x_2 に対して、$P(x_1, x_2)$ という記号によって、x_1 と x_2 の間にある関係性を表わすことにする。このように、二つの項に対して定まる記号 P のことを二項述語記号という。例えば、c_1 を「ソクラテス」、c_2 を「クサンティッペ」、$P(x_1, x_2)$ を「x_1 と x_2 は夫婦だ」とすれば、「ソクラテスとクサンティッペは夫婦だ」は、$P(c_1, c_2)$ と記号化される。あるいは、「クサンティッペとソクラテスは夫婦だ」と言ってもよいので、$P(c_2, c_1)$ と記号化してもよい。しかし、「アリストテレスはプラトンの弟子だ」のように、関係を逆にしてはいけない例もある。つまり、c_1 を「アリストテレス」、c_2 を「プラトン」、$P(x_1, x_2)$ を「x_1 は x_2 の弟子だ」としたとき、「アリストテレスはプラトンの弟子だ」の記号は $P(c_1, c_2)$ であって、$P(c_2, c_1)$ ではない。

また、より多くの個体変項 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ に対しても、$P(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ という記号によって、$x_1, x_2, x_3, \ldots$ の間にある関係性を表わすことにする。このように、二つ以上の項に対して定まる記号（n 項述語記号）を扱う論理のことを多項述語論理という。多項述語論理の論理式は、単項述

語論理の論理式の定義 (p. 43) の (1) を次の (1′) に置き換えればよい。

(1′) $t_1, \ldots, t_n$ を項、P を（n 項）述語記号とする。このとき、$P(t_1, \ldots, t_n)$ のことを原子論理式という。原子論理式は論理式である。

さらに、量化子を用いれば、より複雑な文を表現することもできる。例えば、「x_1 は x_2 を愛する（x_2 は x_1 に愛される）」を $P(x_1, x_2)$ とすると、次のようになる。

(例 1)「誰もが誰をも愛する」：$(\forall x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$
(例 2)「誰もが誰もに愛される」：$(\forall x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$
(例 3)「誰かは誰かを愛する」：$(\exists x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$
(例 4)「誰かは誰かに愛される」：$(\exists x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$
(例 5)「誰もが誰かを愛する」（「誰にでも愛する人がいる」）：

$$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$$

(例 6)「誰かは誰もに愛される」：$(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$
(例 7)「誰かは誰をも愛する」：$(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$
(例 8)「誰もが誰かに愛される」（「誰にでもその人を愛する人がいる」）：

$$(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$$

このとき、例 1 と例 2, 例 3 と例 4 は同じ意味だが、例 5 と例 6, 例 7 と例 8 は同じ意味にならないということに注意せよ。特に、後ろの二つについては、次のようにして説明できる。

x_1 が x_2 を愛する（x_2 が x_1 に愛される）とき、x_1 から x_2 へ矢印を伸ばすことにすると、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$（誰にでも愛する人がいる）が真なら左の図のような状況、$(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$（誰かは誰もに愛される）が

真なら右の図のような状況になる。

$$
\begin{array}{ccc}
c_1 & \longrightarrow & c_1' \\
c_2 & \longrightarrow & c_2' \\
c_3 & \longrightarrow & c_3' \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dr] & \\
c_2 \arrow[r] & c' \\
c_3 \arrow[ur] & \\
\vdots &
\end{tikzcd}
$$

このように、両者の状況は全く異なるので、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ と $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ は同じ意味ではない。また、$(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$（誰かは誰をも愛する）と $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$（誰にでもその人を愛する人がいる）についても同様に説明できるので、$(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ と $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$ も同じ意味ではない。

このことを厳密に示すためには、単項述語論理における閉論理式の真理値だけでは不十分である。そこで、次に多項述語論理における閉論理式の真理値を定義する。

まずは、多項述語論理における外延を定義する。すなわち、P の外延 $V(P)$ を述語記号 P が表わす述語（性質）を満たすような個体 $d_1, \ldots, d_n \in D$ の対 $(d_1, \ldots, d_n)$ 全体からなる集合として再定義する。ただし、ここで考える「対」は、順序を区別する。このような対のことを順序対という。例えば、D を { アメリカ, 日本, バチカン市国 }, $P(x_1, x_2)$ を「x_1 は x_2 よりも広い」とすると、$V(P)$ は

{(アメリカ, 日本), (日本, バチカン市国), (アメリカ, バチカン市国)}

となる。$V(P)$ の要素は、それぞれ、「アメリカは日本よりも広い」、「日本はバチカン市国よりも広い」、「アメリカはバチカン市国よりも広い」ということを表わす。(アメリカ, 日本) の構成要素を逆にした対 (日本, アメリカ) は、「日本はアメリカよりも広い」ということを表わすので、$V(P)$ には含まれない。

単項述語論理における閉論理式の真理値の定義を多項述語論理の場

合に拡張するには、単に定義 (p. 49) の (1) を次の (1′) に置き換えればよい。

> (1′) $P(c_1, \ldots, c_n)$ の真理値は T：$(V(c_1), \ldots, V(c_n)) \in V(P)$
> 　　 $P(c_1, \ldots, c_n)$ の真理値は F：$(V(c_1), \ldots, V(c_n)) \notin V(P)$

さて、これで多項述語論理における二つの閉論理式が同じ意味かどうかを判定できるようになった。ここでは、例 5 と例 6 が同じ意味にならないということのみを示す。

$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ と $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ は同じ意味にならない。なぜなら、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \not\models (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ となるからである。

- $D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P) = \{(d_1, d_2), (d_2, d_1)\}$ という解釈を与えれば、下の表 3.6 から分かるように、この解釈は $(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ を偽にするので、反例になっている。ただし、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ を X, $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ を Y とおいた。

表 3.6: $(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ の真理値表

x_1	x_2	$P(x_1, x_2)$	$P(c_1, x_2)$	$(\exists x_2)P(c_1, x_2)$	$P(c_2, x_2)$	$(\exists x_2)P(c_2, x_2)$	X
c_1	c_1	F	F		-		
c_1	c_2	T	T	T	-	T	T
c_2	c_1	T	-		T		
c_2	c_2	F	-		F		

x_1	x_2	$P(x_1, c_1)$	$(\forall x_1)P(x_1, c_1)$	$P(x_1, c_2)$	$(\forall x_1)P(x_1, c_2)$	Y	$X \rightarrow Y$
c_1	c_1	F		-			
c_1	c_2	-	F	T	F	F	F
c_2	c_1	T		-			
c_2	c_2	-		F			

確認問題 26

✍ 例 7 と例 8 は同じ意味にならないということを示せ。

演習問題

$\boxed{1}$ 次の二つの問いに答えよ。

(1) 個体領域を明示した上で、「どの仕事も大変だが、誰もが頑張って働いている」という文を量化子を用いて記号化せよ。

(2) 個体領域を明示した上で、「議会を欠席する人がいても、可決される議案がある」という文を量化子を用いて記号化せよ。

$\boxed{2}$ 「どんな人も、その人が相対性理論を思いつけるならアインシュタインにも思いつける」と「相対性理論を思いつくことができる人がいるなら、アインシュタインにも思いつける」という二つの文を記号化した上で、それらが同じ意味であるということを示せ。

$\boxed{3}$ 個体領域が有限集合 $\{d_1, \ldots, d_n\}$ のとき、任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して、$d_i = V(c_i)$ となるような $c_1, \ldots, c_n$ が存在するなら、

(i) $(\forall x)\varphi(x)$ が真であるとは、$\varphi[c_1/x], \ldots, \varphi[c_n/x]$ の全てが真になるということなので、$\varphi[c_1/x] \wedge \cdots \wedge \varphi[c_n/x]$ が真になり、

(ii) $(\exists x)\varphi(x)$ が真であるとは、$\varphi[c_1/x], \ldots, \varphi[c_n/x]$ の内のどれか少なくとも一つが真になるということなので、$\varphi[c_1/x] \vee \cdots \vee \varphi[c_n/x]$ が真になる。

この性質を利用すれば、$\varphi[c_i/x]$ を「c_i は〜である」という原子命題とみなすことで、命題論理によって述語論理の文を扱うことができる。

問題：個体領域が有限集合 $\{d_1, \ldots, d_n\}$ のとき、任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して、$d_i = V(c_i)$ となるような $c_1, \ldots, c_n$ が存在すると仮定する。このとき、$(\forall x)\neg\varphi(x)$ と $\neg(\exists x)\varphi(x)$ が同じ意味になるというこ

とを命題論理によって示せ。

$\boxed{4}$ 次の二つの問いに答えよ。

(1)「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥がいる」という文を記号化した上で、この文を表わす閉論理式が、任意の解釈の下で真になることを示せ。

(2) 実際に「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥」を見つけることができないように、直観的には「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥がいる」という文を表わす閉論理式は、任意の解釈の下で真というわけではないように思える。それにも関わらず、この閉論理式が任意の解釈の下で真になってしまう理由を述べよ。

$\boxed{5}$ 次の三つの問いに答えよ。ただし、K さんという個体 d_1 の固有名を表わす個体定項を c_1 とする。

(1)「K さんは、自身の髭を剃らない全ての人の髭を剃る唯一の理容師である。ゆえに、K さんは自身の髭を剃る」という論証が妥当になるということを示せ。

(2)「K さんは、自身の髭を剃らない人の髭だけを剃る唯一の理容師である。ゆえに、K さんは自身の髭を剃らない」という論証が妥当になるということを示せ。

(3) 自身の髭を剃らない全ての人の髭だけを剃る唯一の理容師が存在しないのはなぜか。理由を述べよ。

第 4 章

古典述語論理のタブロー

第 3 章では、閉論理式の真理値の定義を用いて論証が妥当かどうかを判定する方法を学んだ。しかし、この方法は、文章で長々と記述するので視覚的に分かりにくい上に、機械的に実行できる手順ではない。そこで、第 4 章では、視覚的に分かりやすく、しかも機械的に実行できる手順として、述語論理のタブローを導入する。§4.4 までの間は単項述語論理の閉論理式、§4.5 以降は多項述語論理の閉論理式を扱う。

§4.1　述語論理のタブローの規則

命題論理のタブローの規則を参考にしながら、述語論理のタブローの規則をどのように定めればよいか考えてみよう。命題論理のタブローの規則として、$\wedge$ 規則、$\neg\wedge$ 規則、$\vee$ 規則、$\neg\vee$ 規則、$\rightarrow$ 規則、$\neg\rightarrow$ 規則、二重否定除去則の 7 種類があった。真理値の定義 (p. 49) によれば、閉論理式 φ, ψ に対して、$\neg\varphi, \varphi\wedge\psi, \varphi\vee\psi, \varphi\rightarrow\psi$ の真理値は命題論理と同じように定まっているので、これらの 7 種類の規則はそのまま述語論理のタブローの規則に拡張できる。一方で、述語論理では $(\forall x)\varphi(x)$ や $\neg(\exists x)\varphi(x)$ といった閉論理式を扱うので、新たな規則として、$\forall$ 規則、$\neg\forall$ 規則、$\exists$ 規則、$\neg\exists$ 規則の 4 種類が必要になる。

そこで、次のようにして $\forall$ 規則、$\neg\forall$ 規則、$\exists$ 規則、$\neg\exists$ 規則を定義する。ただし、$\varphi(x)$ を x のみが自由変項として現れている論理式、$\varphi[c/x]$ を $\varphi(x)$ に現われる全ての自由変項 x に c を代入して得られる論理式、i を正の整数とする。

- **∀ 規則**：任意の個体定項 c_i が既に与えられているとき、$(\forall x)\varphi(x)$ から $\varphi[c_i/x]$ を得る操作のことを ∀ 規則と呼ぶ。ただし、個体定項が一切与えられていないこともあるので、そのときは個体定項 c_1 を新たに導入した上で（個体に名前をつけた上で）$(\forall x)\varphi(x)$ から $\varphi[c_1/x]$ を得る。個体 $V(c_1)$ が少なくとも一つ存在するということは、個体領域 D の定義（個体からなる非空集合）によって保証されている。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は死ぬ」とすると、任意の個体定項 c_i（例えば、「アリストテレス」）が既に与えられているなら、∀ 規則によって $(\forall x)P(x)$（全ての人間は死ぬ）から $P(c_i)$（アリストテレスは死ぬ）が得られる。
- **¬∃ 規則**：$\neg(\exists x)\varphi(x)$ が真であるとは、任意の $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が偽になるということなので、$(\forall x)\neg\varphi(x)$ は真になる。そこで、任意の個体定項 c_i が既に与えられているとき、$\neg(\exists x)\varphi(x)$ から $\neg\varphi[c_i/x]$ を得る操作のことを ¬∃ 規則と呼ぶ。

∀ 規則	**¬∃ 規則**
$(\forall x)\varphi(x)$	$\neg(\exists x)\varphi(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$\varphi[c_i/x]$	$\neg\varphi[c_i/x]$

適用条件：c_i は、その規則を適用する以前（その規則を適用した部分よりも上の部分）に既に現れている個体定項とする。一つも現れていない場合は、c_i を c_1 とする。

- **∃ 規則**：ある個体定項 c_i を新たに導入した上で（個体に名前をつけた上で）、$(\exists x)\varphi(x)$ から $\varphi[c_i/x]$ を得る操作のことを ∃ 規則と呼ぶ。このような個体定項 c_i のことをスコーレム定項という。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は哲学者で

ある」とすると、ある個体定項 c_i を新たに導入した上で、∃ 規則によって $(\exists x)P(x)$（ある人は哲学者である）から $P(c_i)$（c_i が指示する人は哲学者である）が得られる。

- **¬∀ 規則：**$\neg(\forall x)\varphi(x)$ が真であるとは、ある $d = V(c) \in D$ に対して、$\varphi[c/x]$ が偽になるということなので、$(\exists x)\neg\varphi(x)$ は真になる。そこで、ある個体定項 c_i を新たに導入した上で、$\neg(\forall x)\varphi(x)$ から $\neg\varphi[c_i/x]$ を得る操作のことを ¬∀ 規則と呼ぶ。

∃ 規則	¬∀ 規則
$(\exists x)\varphi(x)$	$\neg(\forall x)\varphi(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$\varphi[c_i/x]$	$\neg\varphi[c_i/x]$

適用条件：c_i は、その規則を適用する以前には現れていない個体定項とする。

まとめると、述語論理のタブローの規則は、次の 11 種類からなる。

∧ 規則	¬∧ 規則	∨ 規則	¬∨ 規則	→ 規則	¬→ 規則
$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ	$\neg\varphi$ ／ $\neg\psi$	φ ／ ψ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$ ／ ψ	φ
ψ			$\neg\psi$		$\neg\psi$

二重否定除去則	∀ 規則	¬∀ 規則	∃ 規則	¬∃ 規則
$\neg\neg\varphi$	$(\forall x)\varphi(x)$	$\neg(\forall x)\varphi(x)$	$(\exists x)\varphi(x)$	$\neg(\exists x)\varphi(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
φ	$\varphi[c_i/x]$	$\neg\varphi[c_i/x]$	$\varphi[c_i/x]$	$\neg\varphi[c_i/x]$

確認問題 27

✍ ∃ 規則と ¬∀ 規則には、適用条件「c_i は、その規則を適用する以前には現れていない個体定項とする」が必要である。その理由を述べよ。

§4.2　真理保存性

§2.1 で述べたように、命題論理のタブローは上から下への真理保存性と下から上への真理保存性という二つの真理保存性を満たしていた。では、述語論理のタブローはどうだろうか。この問いに答えるためには、まずは述語論理のタブローにおける真理保存性を定義しなければならない。

まずは、次のような真理保存性を考えてみよう。述語論理のタブローのある規則が上から下への強真理保存性を満たすとは、

(1) 枝分かれしない場合には、任意の解釈の下で、規則を適用した閉論理式が真ならその規則を適用して得られる全ての閉論理式も真
(2) 枝分かれする場合には、任意の解釈の下で、規則を適用した閉論理式が真ならその規則を適用して得られる二つの閉論理式のどちらか少なくとも一方も真

となることをいう。また、述語論理のタブローが上から下への強真理保存性を満たすとは、全ての規則が上から下への強真理保存性を満たすことをいう。同様に、述語論理のタブローのある規則が下から上への強真理保存性を満たすとは、

(1) 枝分かれしない場合には、任意の解釈の下で、その規則を適用して得られる全ての閉論理式が真なら規則を適用した閉論理式も真
(2) 枝分かれする場合には、任意の解釈の下で、その規則を適用して得られる二つの閉論理式のどちらか少なくとも一方が真なら規則を

　　　適用した閉論理式も真

となることをいう。また、述語論理のタブローが下から上への強真理保存性を満たすとは、全ての規則が下から上への強真理保存性を満たすことをいう。

　実は、述語論理のタブローは、上から下への強真理保存性と下から上への強真理保存性のどちらも満たさない。なぜなら、∀ 規則と ¬∃ 規則は上から下への強真理保存性しか満たさず、∃ 規則と ¬∀ 規則は下から上への強真理保存性しか満たさないからである。¬∃ 規則は ∀ 規則に帰着し、¬∀ 規則は ∃ 規則に帰着するので、∀ 規則と ∃ 規則についてのみ、その理由を次に示す。

$$\checkmark \Bigg\downarrow \begin{array}{c}(\forall x)\varphi(x)\\ \vdots \\ \varphi[c_i/x]\end{array} \Bigg\uparrow \text{✘} \qquad \text{✘} \Bigg\downarrow \begin{array}{c}(\exists x)\varphi(x)\\ \vdots \\ \varphi[c_i/x]\end{array} \Bigg\uparrow \checkmark$$

　まずは、∀ 規則について説明する。∀ 規則が上から下への強真理保存性を満たすことはすぐに分かるので、∀ 規則が下から上への強真理保存性を満たさないということを示す。そのためには、ある解釈の下で、$\varphi[c_i/x]$ が真なら $(\forall x)\varphi(x)$ は偽になるということを示せばよい。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、c_1 を「アリストテレス」、$P(x)$ を「x は死ぬ」とすると、$(\forall x)P(x)$（全ての人間は死ぬ）に ∀ 規則を適用すれば、$P(c_1)$（アリストテレスは死ぬ）が得られるが、例えば $V(P)$ がアリストテレスのみ（つまり、アリストテレスのみが死ぬ）という解釈の下で $P(c_1)$ は真だが、$(\forall x)P(x)$ は偽となる。

　次に、∃ 規則について説明する。∃ 規則が下から上への強真理保存性を満たすことはすぐに分かるので、∃ 規則が上から下への強真理保存性を満たさないということを示す。そのためには、ある解釈の下で、$(\exists x)\varphi(x)$ が真なら $\varphi[c_i/x]$ は偽になるということを示せばよい。例えば、個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は哲学者である」とすると、$(\exists x)P(x)$（ある人は哲学者である）に ∃ 規則を適用すれば、個体定項 c_1

を新たに導入した上で、$P(c_1)$（c_1 が指示する人は哲学者である）が得られるが、ある人が哲学者だからといって c_1 が指示する人が哲学者になるわけではない。例えば、c_1 がシャーロック・ホームズを指示すれば、$P(c_1)$ は偽となる。

そこで、強真理保存性の条件を少し弱めることで、述語論理のタブローが満たすような真理保存性を次のように定義する。述語論理のタブローのある規則が上から下への弱真理保存性を満たすとは、

(1) 枝分かれしない場合には、**ある解釈の下で**、規則を適用した閉論理式が真ならその規則を適用して得られる全ての閉論理式も真
(2) 枝分かれする場合には、**ある解釈の下で**、規則を適用した閉論理式が真ならその規則を適用して得られる二つの閉論理式のどちらか少なくとも一方も真

となることをいう。また、述語論理のタブローが上から下への弱真理保存性を満たすとは、全ての規則が上から下への弱真理保存性を満たすことをいう。同様に、述語論理のタブローのある規則が下から上への弱真理保存性を満たすとは、

(1) 枝分かれしない場合には、**ある解釈の下で**、その規則を適用して得られる全ての閉論理式が真なら規則を適用した閉論理式も真
(2) 枝分かれする場合には、**ある解釈の下で**、その規則を適用して得られる二つの閉論理式のどちらか少なくとも一方が真なら規則を適用した閉論理式も真

となることをいう。また、述語論理のタブローが下から上への弱真理保存性を満たすとは、全ての規則が下から上への弱真理保存性を満たすことをいう。

述語論理のタブローは上から下への弱真理保存性と下から上への弱真理保存性のどちらも満たすということを示そう。∀ 規則と ¬∃ 規則以外の全ての規則は下から上への強真理保存性を満たし、∃ 規則と ¬∀ 規則以外

の全ての規則は上から下への強真理保存性を満たすので、弱真理保存性も満たすことになる。そこで、∀ 規則（¬∃ 規則）が下から上への弱真理保存性を満たし、∃ 規則（¬∀ 規則）が上から下への弱真理保存性を満たすということのみ示す。

まず、∀ 規則が下から上への弱真理保存性を満たすということを示す。∀ 規則を適用する以前に現れた全ての個体定項 $c_1, c_2, c_3, \ldots$ に対して、$D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$, $V(c_1) = d_1, V(c_2) = d_2, V(c_3) = d_3, \ldots$ かつ $\varphi[c_1/x], \varphi[c_2/x], \varphi[c_3/x], \ldots$ の全てが真となるように述語記号の外延を定めれば、この解釈の下で $\varphi[c_i/x]$ と $(\forall x)\varphi(x)$ は共に真となる。このように、個体領域を既に現れた個体定項が指示する全ての個体のみからなる集合としなければ、$\varphi[c_i/x]$ が真であっても $(\forall x)\varphi(x)$ が偽になる可能性を排除できない。例えば、c_1, c_2 のみが既に現れているとき、$P(c_1)$ と $P(c_2)$ は $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(c_3) = d_3$, $V(P) = \{d_1, d_2\}$ という解釈の下で真になるが、その解釈の下で $(\forall x)P(x)$ は偽になる。

次に、∃ 規則が上から下への弱真理保存性を満たすということを示す。$(\exists x)\varphi(x)$ が真なら $\varphi[c_i/x]$ も真になるような解釈を見つけるために、$(\exists x)\varphi(x)$ を真にするような任意の解釈 I_1 を用意し、次の操作を行う。

(1) c_i を $(\exists x)\varphi(x)$ に ∃ 規則を適用することで新たに導入された個体定項とする。I_1 において c_i の指示対象や $(\exists x)\varphi(x)$ に ∃ 規則を適用する以前には現れていない個体定項 c_j の指示対象が $V(c_i) = d_{i'}$ や $V(c_j) = d_{j'}$ という形で定まっているなら、これらの条件を全て削除する。このようにして得られた解釈を I_2 とする。

(2) $(\exists x)\varphi(x)$ が I_1 の下で真なら I_2 の下でも真になる。よって、I_2 の下で φ を満たすような個体 d_k が存在する。そこで、新たに c_i の指示対象として d_k を割り当てる。つまり、I_2 に $V(c_i) = d_k$ という条件を加える。このようにして得られた解釈を I_3 とする。

この新たな解釈 I_3 の下で、$(\exists x)\varphi(x)$ と $\varphi[c_i/x]$ は共に真となる。

確認問題 28

✍ c_1 を $(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ に ∃ 規則を適用する以前に既に現れている個体定項、c_2 をその適用によって新たに導入される個体定項、c_3 をその適用以前には現れていない個体定項とする。このとき、解釈 I_1 を $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_3$, $V(c_3) = d_2$, $V(P_1) = \{d_1, d_2, d_3\}$, $V(P_2) = \{d_2\}$ と定めると、I_1 の下で $(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ は真だが $P_1(c_2) \to P_2(c_2)$ は偽になる。このとき、$(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ と $P_1(c_2) \to P_2(c_2)$ を共に真とするような解釈 I_3 を本文で述べた手順に従って求めよ。

§4.3　タブローによる論証の分析

命題論理では、原子命題 A とその否定 $\neg A$ のことをそれぞれリテラルと呼んだが、述語論理では、原子論理式 $P(t_1, \ldots, t_n)$ とその否定 $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ のことをそれぞれリテラルと呼ぶ。また、命題論理のタブローについて定義されていた「完成する」、「閉じる」、「開く」という用語の定義に現われる「命題」を全て「閉論理式」に置き換えることで、述語論理のタブローについての定義に拡張する。

このとき、命題論理のタブローによる論証の分析手順 (p. 30) は、次のように拡張される。

<u>述語論理のタブローによる論証の分析手順</u>

(1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ から φ_{n+1} への論証を分析したいとき、それを $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi_{n+1}$ という閉論理式に変換する。

(2) その閉論理式を否定した $\neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi_{n+1})$ のタブローを描く。

(3) (i) そのタブローのある枝が開けば、論証は妥当ではない。

そのタブローの開いた枝を一本だけ自由に選ぶ。その枝に現われる全てのリテラルを確認し、$P(c_1, \ldots, c_n)$ という形のリテラルが現れるなら $P(c_1, \ldots, c_n)$ が真、$\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ という形のリテラルが現れるなら $P(c_1, \ldots, c_n)$ が偽となるように解釈を定めることで反例が得られる。ただし、個体領域は既に現れた個体定項が指示する全ての個体のみからなるものとする。

(ii) そのタブローが閉じれば、論証は妥当である。

述語論理のタブローは弱真理保存性を満たしているので、この手順によって論証の妥当性を正しく判定できる。なぜなら、上から下への弱真理保存性がタブローによる妥当性の証明手順の正しさを保証し、下から上への弱真理保存性がタブローによる反例の発見手順の正しさを保証するからである。

まず、上から下への弱真理保存性がタブローによる妥当性の証明手順の正しさを保証するということを示す。閉じたタブローの根本に $\neg(\varphi \to \psi)$ があるとき、そのタブローの枝には原子論理式 $P(c_1, \ldots, c_n)$ とその否定 $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ が同時に現われる。上から下への真理保存性から、ある解釈の下で $\neg(\varphi \to \psi)$ が真なら $P(c_1, \ldots, c_n)$ と $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ も共に真となる。しかし、$P(c_1, \ldots, c_n)$ が真なら $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ は偽、$P(c_1, \ldots, c_n)$ が偽なら $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ は真となるはずなので、そのようなことは起こりえない。よって、$\neg(\varphi \to \psi)$ を真にするような解釈は存在しない。つまり、$\varphi \to \psi$ は反例をもたないので、φ から ψ への論証は妥当になる。

次に、下から上への真理保存性がタブローによるタブローによる反例の発見手順の正しさを保証するということを示す。開いたタブローの根本に $\neg(\varphi \to \psi)$ があるとき、そのタブローに現われる全てのリテラルを確認し、$P(c_1, \ldots, c_n)$ という形のリテラルが現われるなら $P(c_1, \ldots, c_n)$ が真、$\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ という形のリテラルが現われるなら $P(c_1, \ldots, c_n)$ が偽となるように解釈を定める。下から上への真理保存性から、このような

解釈の下で $\neg(\varphi \to \psi)$ は真になる。よって、同じ解釈の下で $\varphi \to \psi$ は偽になる。つまり、$\varphi \to \psi$ は反例をもつので、φ から ψ への論証は妥当にならない。

では、述語論理のタブローによる論証の分析手順を実際に実行してみよう。例えば、§3.5 で扱った二つの論証「ロシアは共和制だ。全ての共和国には君主がいない。よって、ロシアには君主がいない」と「ある紅茶は美味しい。だから、美味しくないような紅茶はない」を分析する。

個体領域が全ての国からなるとき、c_1 を「ロシア」、$P_1(x)$ を「x は共和制だ」、$P_2(x)$ を「x には君主がいない」とすると、一つ目の論証は、$P_1(c_1), (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ から $P_2(c_1)$ への論証となるので、$\neg(P_1(c_1) \wedge (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to P_2(c_1))$ のタブローを描けばよい。

$$
\begin{array}{c}
\neg(P_1(c_1) \wedge (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to P_2(c_1)) \\
| \\
P_1(c_1) \wedge (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\
\neg P_2(c_1) \\
| \\
P_1(c_1) \\
(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\
| \\
P_1(c_1) \to P_2(c_1) \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg P_1(c_1) \qquad P_2(c_1) \\
\text{✗} \qquad\qquad \text{✗}
\end{array}
$$

すると、このようにタブローは閉じるので、$P_1(c_1), (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \models P_2(c_1)$ となる。このタブローでは、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ よりも前に $P_1(c_1)$ という形で c_1 が現れているので、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ に $\forall$ 規則を適用することで $P_1(c_1) \to P_2(c_1)$ を得ている。

一方で、個体領域が全ての紅茶からなるとき、$P(x)$ を「x は美味しい」とすると、二つ目の論証は、$(\exists x)P(x)$ から $\neg(\exists x)\neg P(x)$ への論証となるので、$\neg((\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x))$ のタブローを描けばよい。

$$\neg((\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x))$$
$$|$$
$$(\exists x)P(x)$$
$$\neg\neg(\exists x)\neg P(x)$$
$$|$$
$$(\exists x)\neg P(x)$$
$$|$$
$$P(c_1)$$
$$|$$
$$\neg P(c_2)$$

すると、このようにタブローは開くので、$(\exists x)P(x) \not\models \neg(\exists x)\neg P(x)$ となる。このとき、$(\exists x)\neg P(x)$ に ∃ 規則を適用して導入される記号は c_1 ではなく c_2 であるということに注意せよ。なぜなら、$(\exists x)\neg P(x)$ に対して ∃ 規則を適用する以前に、既に $P(c_1)$ という形で c_1 が現れているからである。∃ 規則は、その規則を適用する以前には現れていない個体定項を導入するという適用条件を忘れてはならない。もしも $(\exists x)\neg P(x)$ に ∃ 規則を適用することで $\neg P(c_1)$ が得られるのであれば、このタブローは閉じてしまう。しかし、既に §3.5 でみたように、この論証は妥当ではないはずである。

このタブローに現われるリテラルは、$P(c_1)$ と $\neg P(c_2)$ の二つである。よって、$P(c_1)$ が真、$P(c_2)$ が偽となるように解釈を定めれば反例が得られる。そこで、$D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P) = \{d_1\}$ とすればよい。このとき、下の表 4.1 から分かるように、確かにこの解釈は、$P(c_1)$ を真、$P(c_2)$ を偽とする上に、$(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ を偽にする。ただし、$(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ を X とおいた。

表 4.1: $(\exists x)P(x) \to \neg(\exists x)\neg P(x)$ の真理値表

<table>
<tr><th>x</th><th>$P(x)$</th><th>$(\exists x)P(x)$</th><th>$\neg P(x)$</th><th>$(\exists x)\neg P(x)$</th><th>$\neg(\exists x)\neg P(x)$</th><th>X</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>T</td><td rowspan="2">T</td><td>F</td><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>F</td><td>T</td></tr>
</table>

確認問題 29

✍ 次の二つの論証が妥当かどうかをタブローを用いて判定せよ。

(1) ドラえもんはネコ型ロボットだ。あるロボットは、それがネコ型なら未来からやってきた。ゆえに、ドラえもんは未来からやってきた。

(2) 全ての命題は真か偽のどちらか少なくとも一方だ。従って、ある命題は真か偽のどちらか少なくとも一方だ。(ただし、「命題は真か偽のどちらか少なくとも一方だ」は「『命題は真だ』または『命題は偽だ』」に分解すること)

§4.4　タブローの規則の適用順序と複数回適用

§3.6 では、$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$ は同じ意味だが、$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x)$ は同じ意味ではないということを示した。ここでは、次の四つをタブローによって示してみよう。

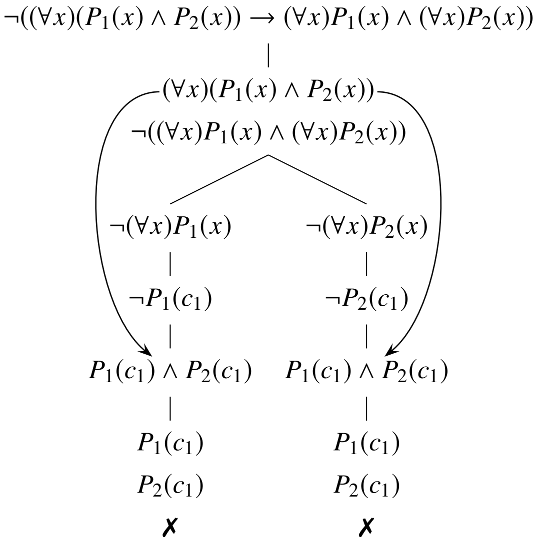
(1) $(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \models (\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)$

(2) $(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x) \models (\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$

(3) $(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x)$

(4) $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \not\models (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$

まず、(1) を示すために、$\neg((\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \rightarrow (\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x))$ のタブローを描くと、次のようになる。



このタブローを描くとき、$\forall$ 規則よりも先に $\neg\forall$ 規則を適用しているという点に注意せよ。もしも先に $(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ に $\forall$ 規則を適用して $P_1(c_1) \wedge P_2(c_1)$ を得てしまえば、$\neg(\forall x)P_1(x)$ や $\neg(\forall x)P_2(x)$ に $\neg\forall$ 規則を適用して c_1 を導入することができない。なぜなら、c_1 は、その $\neg\forall$ 規則を適用する以前に $P_1(c_1) \wedge P_2(c_1)$ として現れているからである。

この例から推察されるように、$\exists$ 規則や $\neg\forall$ 規則は、$\forall$ 規則や $\neg\exists$ 規則よりも先に適用しなければならない。このように、述語論理のタブローは、命題論理のタブローとは違って、規則の適用順序を変えても同じ結果が得られるわけではない。

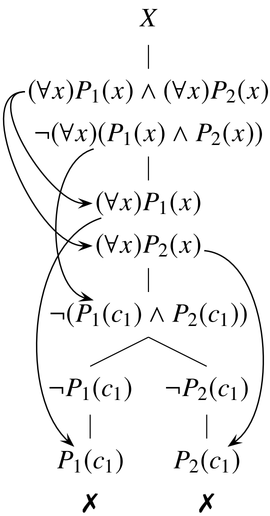
述語論理のタブローを描くときの注意点 1

$\exists$ 規則や $\neg\forall$ 規則は、$\forall$ 規則や $\neg\exists$ 規則よりも先に適用しなければならない。

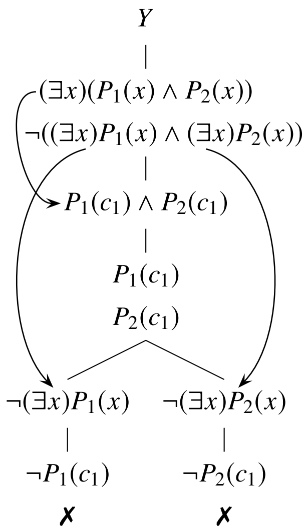
このことに注意しながら、(2), (3), (4) も示してみよう。$\neg((\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x) \to (\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)))$ を X, $\neg((\exists x)(P_1(x) \wedge$

$P_2(x)) \rightarrow (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x))$ を Y, $\neg((\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)P_2(x) \rightarrow (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x)))$ を Z とおくと、X と Y のタブローは閉じるが、Z のタブローは開く。

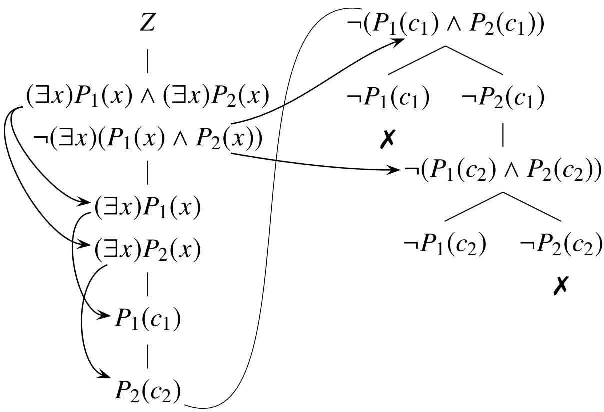
(2)



(3)



(4)



Z のタブローから、例えば、$D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P_1) = \{d_1\}$, $V(P_2) = \{d_2\}$ のように、$P_1(c_1)$ と $P_2(c_2)$ が真、$P_2(c_1)$ と

$P_1(c_2)$ が偽となるような解釈は反例になるということが分かる。

Z のタブローを描くとき、$\neg(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ に $\neg\exists$ 規則を二回適用していることに注意せよ。一回目の適用では $\neg(P_1(c_1) \wedge P_2(c_1))$ を得て、二回目の適用では $\neg(P_1(c_2) \wedge P_2(c_2))$ を得ている。一方で、$(\exists x)P_1(x)$ や $(\exists x)P_2(x)$ には、一度しか $\exists$ 規則を適用できない。なぜなら、$(\exists x)\varphi(x)$ が真であるとは、少なくとも一つの $d = V(c) \in D$ に対して $\varphi[c/x]$ が真になるということなので、唯一の $d = V(c) \in D$ に対して $\varphi[c/x]$ が真になる可能性がある。よって、$\varphi[c/x]$ が真になるような $d = V(c)$ が唯一存在するのか、それとも複数存在するのかが分かっていない以上、同じ閉論理式 $(\exists x)\varphi(x)$ に対して、$\exists$ 規則を二回以上適用してはならない。

この例から推察されるように、$\forall$ 規則や $\neg\exists$ 規則は、同じ閉論理式に対して二回以上適用してもよい。このように、述語論理のタブローは、命題論理のタブローとは違って、同じ規則を複数回適用できる。

述語論理のタブローを描くときの注意点 2

$\forall$ 規則や $\neg\exists$ 規則は、同じ閉論理式に対して複数回適用できる。それ以外の規則は、同じ閉論理式に対して一度しか適用できない。

確認問題 30

✍ 次の四つの論証が妥当かどうかをタブローを用いて判定せよ。

(1) $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ から $(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ への論証
(2) $(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ から $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ への論証
(3) $(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ から $(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ への論証
(4) $(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ から $(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ への論証

§4.5　多項述語論理のタブロー

これまでは、単項述語論理の閉論理式のタブローについてのみ述べてきたが、§4.1 で定義した述語論理のタブローの規則は、多項述語論理の閉論理式に対しても適用することができる。そこで、多項述語論理の例もみてみよう。

§3.7 では、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ と $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ が同じ意味ではないということを示した。ここでは、次の二つをタブローによって示してみよう。

(1) $(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \not\models (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$

(2) $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2) \models (\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$

まずは、先に (2) を示す。単項述語論理の場合と同じく、∃ 規則や ¬∀ 規則は、∀ 規則や ¬∃ 規則よりも先に適用しなければならない。すると、$\neg((\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2) \to (\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2))$ のタブローは次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\neg((\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2) \to (\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)) \\
| \\
(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2) \\
\neg(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \\
| \\
(\forall x_1)P(x_1, c_1) \\
| \\
\neg(\exists x_2)P(c_2, x_2) \\
| \\
P(c_2, c_1) \\
| \\
\neg P(c_2, c_1) \\
\text{✗}
\end{array}
$$

次に、(1) を示す。$\neg((\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1,x_2))$ のタブローは次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1,x_2)) \\
| \\
(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) \\
\neg(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1,x_2) \\
| \\
(\exists x_2)P(c_1,x_2) \\
| \\
P(c_1,c_2) \\
| \\
\neg(\forall x_1)P(x_1,c_2)
\end{array}
$$

このとき、$\neg(\forall x_1)P(x_1,c_2)$ に $\neg\forall$ 規則を適用して $\neg P(c_1,c_2)$ を得ることはできない。なぜなら、c_1 は既に $(\exists x_2)P(c_1,x_2)$ あるいは $P(c_1,c_2)$ という形で現れているので、$\neg\forall$ 規則によって c_1 を導入することはできないからである。よって、このタブローは閉じず、新たな個体定項 c_3 を導入することで、次のように続いていく。

$$
\begin{array}{ccc}
X & & \neg P(c_3,c_2) \\
| & & | \\
(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) & & (\exists x_2)P(c_3,x_2) \\
\neg(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1,x_2) & & | \\
| & & P(c_3,c_4) \\
(\exists x_2)P(c_1,x_2) & & | \\
| & & \neg(\forall x_1)P(x_1,c_4) \\
P(c_1,c_2) & & | \\
| & & \neg P(c_5,c_4) \\
\neg(\forall x_1)P(x_1,c_2) & & \vdots
\end{array}
$$

このとき、$(\exists x_2)P(c_3,x_2)$ に $\exists$ 規則を適用して $P(c_3,c_2)$ を得ることはできないし、$\neg(\forall x)P(x_1,c_4)$ に $\neg\forall$ 規則を適用して $\neg P(c_3,c_4)$ を得ることもできないということに注意せよ。従って、このようにタブローは閉じることなく延々と続いていく。

タブローが開くとは、タブローのある枝が完成している上に閉じていないということだった。しかし、このタブローはいつまでも完成しない上に、いつまでも閉じないので、このタブローは開くことも閉じることもない。よって、タブローを用いて $(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ から $(\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ への論証が妥当かどうかを判定することはできない。ただし、実際にはこの論証は妥当ではない。なぜなら、§3.7 で述べたように、$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2)$ には $D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1, V(c_2) = d_2, V(P) = \{(d_1, d_2), (d_2, d_1)\}$ という反例が存在するからである。つまり、妥当ではないと判定できないからといって、妥当ではないということを確認する方法がないわけではない。

実は、述語論理には、たとえタブロー以外の方法を用いたとしても、それが妥当かどうかを判定することのできない論証が存在するということが知られている。詳しくは、リチャード・ジェフリー『形式論理学：その展望と限界』（戸田山和久訳、産業図書、1995 年）などを参照せよ。

一般に、それが妥当かどうかを判定する有限で機械的な操作が存在しないような論証があれば、論証の妥当性は決定不可能であるという。よって、述語論理の論証の妥当性は決定不可能である。一方で、命題論理にはこのような例はないので、命題論理の論証の妥当性は決定可能である。

確認問題 31

✍ 次の二つの論証は、それぞれ妥当かどうかをタブローによって判定できるだろうか。できるなら、その判定結果を述べよ。

(1) $(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ から $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$ への論証

(2) $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$ から $(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ への論証

§4.6　ヒンティッカ集合

既に述べたように、$\neg((\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2))$ のタブローは永遠に完成しない。しかし、それでは不便なので、仮に無限に長い枝をもつタブローであっても「完成」するように、「完成」という言葉を再定義しよう。

無限に長い枝は、タブローの規則を無限回適用することで得られる。しかし、実際に規則を無限回適用することはできないので、その枝は完成しない。そこで、規則の適用によって「完成」という言葉を定義するのではなく、規則を適用することで得られる閉論理式の集合によって「完成」という言葉を定義する。つまり、「無限に長い枝に現われる全ての閉論理式からなる集合」なるものを定めた上で、ある無限に長い枝に現われる全ての閉論理式がその集合に含まれるとき、その枝は「完成」しているとみなすことにする。

「完成」という言葉は、有限の長さの枝に対しても定義されるべきなので、より一般的に、「ある枝に現われる全ての閉論理式からなる集合」を定義しよう。そのために、仮にそのような集合 S があれば、S はどのような性質を満たすべきなのかを考えてみる。

まず、もしも S に $P(c_1, \ldots, c_n)$ とその否定 $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ が同時に現れれば、その枝は閉じていたということになる。しかし、一度枝が閉じれば、その枝に現われる閉論理式にタブローの規則をさらに適用する必要性はなくなるので、その枝を伸ばす必要もなくなる。よって、そのような枝は、「完成」している必要はない。そこで、S には、$P(c_1, \ldots, c_n)$ と $\neg P(c_1, \ldots, c_n)$ が同時に現れることはないものとする。

また、枝がタブローの規則に従って形成されていくように、S もタブローの規則に従って形成されていく。つまり、例えば S に $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ が含まれていれば、$\wedge$ 規則を適用して得られる φ_1 と φ_2 も S に含まれているはずである。同様のことは、その他の規則についても言える。

以上の内容を総合すると、S は次の性質を満たす。

(1) $P(c_1,\ldots,c_n) \in S$ かつ $\neg P(c_1,\ldots,c_n) \in S$ とはならない。
(2) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in S$ ならば $\varphi_1 \in S$ かつ $\varphi_2 \in S$ となる。
(3) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in S$ ならば $\varphi_1 \in S$ または $\varphi_2 \in S$ となる。
(4) $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in S$ ならば $\neg\varphi_1 \in S$ または $\neg\varphi_2 \in S$ となる。
(5) $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in S$ ならば $\neg\varphi_1 \in S$ かつ $\neg\varphi_2 \in S$ となる。
(6) $\neg\neg\varphi \in S$ ならば $\varphi \in S$ となる。
(7) $(\forall x)\varphi(x) \in S$ ならば、任意の個体定項 c に対して $\varphi[c/x] \in S$ となる。
(8) $\neg(\exists x)\varphi(x) \in S$ ならば、任意の個体定項 c に対して $\neg\varphi[c/x] \in S$ となる。
(9) $(\exists x)\varphi(x) \in S$ ならば、ある個体定項 c に対して $\varphi[c/x] \in S$ となる。
(10) $\neg(\forall x)\varphi(x) \in S$ ならば、ある個体定項 c に対して $\neg\varphi[c/x] \in S$ となる。

そこで、逆に S を (1) から (10) までの条件を満たす集合として定義する。このような集合 S のことをヒンティッカ集合という。特に、S の要素が無限個の場合に、S は「無限に長い枝に現われる全ての閉論理式からなる集合」に相当する。

このようにヒンティッカ集合を定義したとき、タブローの枝が完成するということをその枝に現われる全ての閉論理式がヒンティッカ集合に含まれることとして再定義する。この定義は、枝の長さが有限であっても無限であっても有効である。

ヒンティッカ集合は、「ある枝に現われる全ての閉論理式からなる集合」を表現するために定義されたが、ヒンティッカ集合の条件 (1) から、実際には「ある開いた枝に現われる全ての閉論理式からなる集合」に相当する。よって、この新しい定義によれば、タブローのある枝が完成するなら、その枝は自動的に開くことになる。つまり、完成した枝が閉じることはないが、枝が閉じるならその枝が「完成」しているかどうかとは無関係

に論証が妥当であると判定できるので、このような定義でも特に問題は生じない。

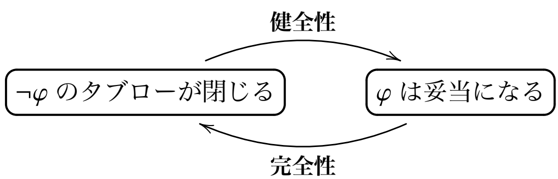
> **確認問題 32**
>
> ✍ 多項述語論理において、無限個の閉論理式がヒンティッカ集合 S に含まれるとき、それらを全て真にするような解釈を求めよ。

§4.7　述語論理のタブローの健全性と完全性

命題の恒真性に対応する概念として、閉論理式の妥当性がある。つまり、閉論理式が妥当であるとは、その閉論理式があらゆる解釈に対して真になることをいう。解釈が閉論理式の意味を決めているので、閉論理式が妥当であるとは、その閉論理式が常に真になるということでもある。閉論理式の妥当性と、論証の妥当性を混同しないように注意せよ。閉論理式があらゆる解釈に対して真になるとき、その閉論理式は「恒真」であると呼んだ方が分かりやすいはずだが、伝統的に「妥当」と呼ばれているので、ここでは伝統的な用法に従う。

§2.5 では、命題論理のタブローが健全性と完全性を満たすということを示した。実は、述語論理のタブローも健全性と完全性を満たす。つまり、任意の閉論理式 φ に対して、次の二つが成り立つ。

(a) $\neg\varphi$ のタブローが閉じるなら φ は妥当になる。
(b) φ が妥当なら $\neg\varphi$ のタブローは閉じる。



しかし、述語論理は決定不可能だった。それにも関わらず、健全性と完

全性が成り立つのは、「タブローが閉じる」あるいは「閉論理式が妥当になる」という条件は、それが有限で機械的な操作によって達成されるかどうかということとは無関係だからである。

述語論理の健全性と完全性も命題論理のときと同様の方針によって示される。ただし、その細部には修正が必要である。以下の証明では、ヒンティッカ集合による「完成」の定義を用いる。

まずは、タブローの健全性から示そう。健全性を示すために、対偶「φ が妥当ではないなら $\neg\varphi$ のタブローは開く」を示す。「$\neg\varphi$ のタブローは閉じる」の否定が「$\neg\varphi$ のタブローは開く」となるのは、ヒンティッカ集合を用いて「完成」を定義したからである。さもなくば、タブローが完成しない上に閉じないとき、タブローは閉じることも開くこともないので、「閉じる」の否定が「開く」にはならない。仮定から φ は妥当ではないので、φ の反例が存在する。つまり、$\neg\varphi$ は、ある解釈 I の下で真になる。よって、タブローの上から下への弱真理保存性から、$\neg\varphi$ が I の下で真なら $\neg\varphi$ のタブローのある完成した枝に現われる全ての命題も I の下で真になる。このとき、もしもその枝に原子論理式 $P(c_1,...,c_n)$ とその否定 $\neg P(c_1,...,c_n)$ が同時に現れれば、両者は共に I の下で真になるはずだが、$P(c_1,...,c_n)$ が真なら $\neg P(c_1,...,c_n)$ は偽で、$\neg P(c_1,...,c_n)$ が真なら $P(c_1,...,c_n)$ は偽になるはずなので、そのようなことは起こりえない。よって、その枝に $P(c_1,...,c_n)$ と $\neg P(c_1,...,c_n)$ が同時に現われることはない。従って、その枝に現われるどの閉論理式もヒンティッカ集合に含まれるので、タブローは開く。

次に、タブローの完全性を示す。完全性を示すために、対偶「$\neg\varphi$ のタブローが開くなら φ は妥当ではない」を示す。「$\neg\varphi$ のタブローは閉じる」の否定が「$\neg\varphi$ のタブローは開く」となる理由は既に説明した。$\neg\varphi$ のタブローが開くなら、ある開いた枝が存在するので、その枝に現われる全てのリテラルを確認し、$P(c_1,...,c_n)$ という形のリテラルが現れるなら解釈 I の下で $P(c_1,...,c_n)$ を真、$\neg P(c_1,...,c_n)$ という形のリテラルが現れるなら同じく I の下で $P(c_1,...,c_n)$ を偽とする。このとき、タブローの

下から上への弱真理保存性から、その開いた枝に現われる全ての命題は I の下で真になる。よって、その枝の根にある $\neg\varphi$ も I の下で真になる。つまり、φ には反例がある。従って、φ は妥当ではない。

確認問題 33

✍ 次の空欄に当てはまる言葉として最も適切なものを選択肢 ① から ⑥ の中から選べ。ただし、同じ片仮名の空欄には同じ選択肢が入るものとする。

> φ がある解釈の下で真なら、タブローの $\boxed{\text{ア}}$ の対偶から、$\boxed{\text{イ}}$ のタブローは開く。

① φ	② 決定不可能性	③ 健全性
④ 完全性	⑤ 無矛盾性	⑥ $\neg\varphi$

演習問題

$\boxed{1}$ 次の閉論理式のタブローが閉じるかどうかを判定せよ。

(1) $(\forall x)(P(x) \wedge \neg(\forall x)P(x))$

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x))$

(3) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg(\forall x)P(x))$

(4) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x))$

$\boxed{2}$ 第 3 章の最後の演習問題をタブローによって解け。すなわち、タブローを用いて、次の三つの問いに答えよ。

(1)「K さんは、自身の髭を剃らない全ての人の髭を剃る唯一の理容師である。ゆえに、K さんは自身の髭を剃る」という論証が妥当になるということを示せ。

(2)「K さんは、自身の髭を剃らない人の髭だけを剃る唯一の理容

師である。ゆえに、K さんは自身の髭を剃らない」という論証が妥当になるということを示せ。

(3) 自身の髭を剃らない全ての人の髭だけを剃る唯一の理容師が存在しないのはなぜか。理由を述べよ。

$\boxed{3}$ $P(x, y)$ を「x と y は関係している」とすれば、P は x と y の間にある関係を表わす。このとき、P の性質を次のように定める。

- **対称性**：$(\forall x_1)(\forall x_2)(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$ が妥当になるとき、P は対称的であるという。
- **推移性**：$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3))$ が妥当になるとき、P は推移的であるという。
- **ユークリッド性**：$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(P(x_1, x_2) \land P(x_1, x_3) \to P(x_2, x_3))$ が妥当になるとき、P はユークリッド的であるという。

問題：タブローを用いて、次の二つを示せ。

(1)「P は対称的かつ推移的である。よって、P はユークリッド的である」という論証が妥当になることを示せ。

(2)「P は対称的かつユークリッド的である。よって、P は推移的である」という論証が妥当になることを示せ。

$\boxed{4}$ 少なく人も一人の人間に教える人のことを教師と呼ぶことにする。このとき、タブローを用いて「教師は誰からも教わる。自分自身に教える人がいる。よって、どんな人にも、その人から教わる人がいる」という論証が妥当かどうかを判定せよ。ただし、「x は y に教える」を表わす記号 $P(x, y)$ を用いること。

$\boxed{5}$ $P(c_1) \land P(c_2) \land P(c_3) \land \cdots$ のように無限個の記号からなる閉論理式のタブローは永遠に完成しないことがある。しかし、多項述語論理には、$\neg((\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)P(x_1, x_2))$ のように、たとえ有限個の記号からなる閉論理式であっても、そのタブローが永遠に完成しないようなものがあった。では、単項述語論理の範囲に限定しても、そのような（有限個の記号からなる）閉論理式

は存在するのだろうか。存在するならその具体例を挙げ、存在しないならその理由を説明せよ。

補遺

本書では、述語論理の主軸となる内容を扱った。述語論理に関する発展的な話題としては、次のようなものがある。

- **同一性記号**：ある特殊な二項述語記号として、同一性記号と呼ばれる記号 I がある。この記号は、$I(x_1, x_2)$ という形で、「x_1 と x_2 は同じである」ということを表わし、次の二つの閉論理式を妥当にするという点において、他の二項述語記号にはない特徴をもっている。
  (1) **同一律**：$(\forall x_1)I(x_1, x_1)$
  （どんな個体も自身と同一である）
  (2) **代入法則**：$(\forall x_1)(\forall x_2)(P(x_1) \wedge I(x_1, x_2) \to P(x_2))$
  （ある個体が満たす性質は、それと同一の個体も満たす）
  この記号を導入することで、述語論理の表現力は格段に上昇する。例えば、$(\exists x)$ は「少なくとも一つの個体に対して $\cdots$」を表していたが、同一性記号があれば、「唯一の個体に対して $\cdots$」、「ある二つの個体に対して $\cdots$」、「少なくとも二つの個体に対して $\cdots$」といった文も表わすことができるようになる。
- **確定記述**：§ 3.1 で少し紹介したが、ある個体を一意に指定する記述のことを確定記述という。確定記述は、ある性質 φ によって唯一の個体を指定する。例えば、ジョージ・ワシントンは、「アメリカの初代大統領」という性質 φ によって一意に指定される。そこで、ι（イオタ）を反転させた記号 ℩ を用いて、確定記述を (℩x)$\varphi(x)$ と書くことにする。℩ は x を束縛しているという点において量化子に似ているが、(℩x)$\varphi(x)$ は閉論理式ではなく、φ を満たすような唯一の個体の表現になっている。ただし、確定記述は、同一性記号

が導入された述語論理のある閉論理式に還元できるので、実際には個体の表現ではないと考える人もいる。

- **端的な非存在者の扱い**：「性質 φ を満たす個体が存在しない」という文は、$\neg(\exists x)\varphi(x)$ と記号化できる。しかし、同一性記号なしの述語論理では、端的に「個体 $V(c)$ が存在しない」という文を記号化することができない。そこで、同一性記号 I を導入すれば、「個体 $V(c)$ が存在しない」という文は、$\neg(\exists x)I(x,c)$（c という名前をもつ個体は存在しない）と記号化できる。これで解決したかのようにみえるが、実は $\neg(\exists x)I(x,c)$ が真になることはない。よって、「個体 $V(c)$ が存在しない」という状況を表わすことができない。そこで、一つの解決策として、述語論理を自由論理と呼ばれる論理に拡張する方法がある。ここで、「自由」とは、§3.1 で述べた、「任意の c に対して、$d = V(c)$ を満たすような $d \in D$ が存在する」という仮定を課さないということを表している。従って、自由論理では、$d = V(c)$ を満たすような $d \in D$ が存在しないこともあるので、端的な非存在者を扱うことができる。
- **関数記号**：c_1 を「アリストテレス」、c_2 を「プラトン」、c_3 を「ソクラテス」、$P(x_1,x_2)$ を「x_1 は x_2 の弟子だ」とすると、「アリストテレスはプラトンの弟子だ」は $P(c_1,c_2)$,「プラトンはソクラテスの弟子だ」は $P(c_2,c_3)$ と記号化される。このとき、「x の弟子」を表わす記号 $f(x)$ と同一性記号 I を用いて、前者を $I(c_1,f(c_2))$, 後者を $I(c_2,f(c_3))$ と記号化してもよい。このような記号 f のことを関数記号という。この例では、関数記号は一つの項に対して定まっていたが、より一般的に、n 個の項に対して定まる関数記号を考えてもよい。
- **二階述語論理**：本書で扱った述語論理は、厳密には一階述語論理と呼ばれている。一階述語論理では、$(\forall x)$ が「全ての個体に対して $\cdots$」を表わすように、個体に対してしか量化が行われないが、二階述語論理と呼ばれる論理では、$(\forall P)$（「全ての述語に対して $\cdots$」）

のような、述語に対する量化を許す。

解答

確認問題の解答

確認問題 1 (p. 3)

(1) 命題ではない。疑問文は判断や主張ではない。(2) 命題ではない。正しいかどうかを明確に判断できない。(3) 真の命題。(4) 命題。その意味は、主張する人がそうだと思うなら真、思わないなら偽となる。(5) 偽の命題。

確認問題 2 (p. 3)

(1) 同じ意味ではない。私は猫が好きでも嫌いでもないとき、「私は猫が好きだ」は偽になるが、「私は猫が嫌いではない」は真になる。
(2) 同じ意味。
  (i) もしも「私は猫が好きだ」が真かつ「猫は私が好きだ」が真なら「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」も「私は猫が好きだけれども、猫は私が好きだ」も真になり、
  (ii) もしも「私は猫が好きだ」と「猫は私が好きだ」のどちらか一方が偽なら「私は猫が好きだし、猫も私が好きだ」も「私は猫が好きだけれども、猫は私が好きだ」も偽になる

  二つの文のニュアンスは異なるが、論理学における「意味」は同じである。

確認問題 3 (p. 5)

③のみ。①は、K さんが東京と大阪に同時にいることはないので排他

的選言である。②を「中学生以上なら参加できる」または「保護者同伴なら参加できる」と解釈すると、「中学生以上なら参加できるが、保護者同伴なら参加できない」という可能性が生じるので、正しい解釈ではない。正しくは、「中学生以上なら参加できる」かつ「保護者同伴なら参加できる」と解釈すべきだが、この解釈だと「または」で接続されていないので、両立的選言でも排他的選言でもない。また、「中学生以上または保護者同伴なら参加できる」と解釈すると、「A または B」の形ではなく、「A または B ならば C」の形になってしまうので、やはり両立的選言でも排他的選言でもない。③は、地震、雷、火事、親父の内の少なくとも一つについて怖いと感じるということなので、両立的選言である。④は、M さんのことが好きかつ嫌いという可能性が排除されているので、排他的選言である。

確認問題 4 (p. 5)

(1) 約束を守ったことにはならない。なぜなら、L さんは K さんに 100 万円を渡さなかったのに、*A* さんは交際したからである。
(2) 渡したと考えてよい。なぜなら、K さんと L さんが交際すれば「交際しない」は偽になるので、K さんが「100 万円くれないなら交際しない」という約束を守るためには、「100 万円くれない」が偽でなければならないので、L さんは K さんに 100 万円渡している。

確認問題 5 (p. 7)

A を「K さんは大学生である」、B を「L さんは大学生である」とする。このとき、(1) は $\neg A \land \neg B$, (2) は $\neg(A \land B)$, (3) は $\neg A \to \neg B$, (4) は $\neg(A \to B)$ となる。

確認問題 6 (p. 7)

(1) $A \land B \to R$, (2) $\neg\neg A \lor B \to C$, (3) $A \land (B \land C \to D)$, (4) $A \land (\neg B \land C \to D \lor E)$, (5) $\neg(A \to B) \lor (C \land (\neg D \to E))$ となる。

注意 (2) において $A \vee B \to C$ としてしまわないように。また、(5) において、$\neg(A \to B) \vee C \wedge (\neg D \to E)$ としてしまわないように。$\wedge$ と $\vee$ の優先順位は同じなので、$(\neg(A \to B) \vee C) \wedge (\neg D \to E)$ なのか、それとも $\neg(A \to B) \vee (C \wedge (\neg D \to E))$ なのか判断できない。

確認問題 7 (p. 10)

A を「私は猫が好きだ」、B を「私は犬が嫌いだ」とする。

(1)「私は猫が好きだが犬は嫌いだ、ということはない」は $\neg(A \wedge B)$ となる。

表 1: $\neg(A \wedge B)$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(2)「私は猫が好きではないか犬が嫌いではないなら犬が嫌いだ」は $\neg A \vee \neg B \to B$ となる。

表 2: $\neg A \vee \neg B \to B$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \vee \neg B \to B$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F

確認問題 8 (p. 10)

A を「私は猫が好きだ」、B を「私は犬が好きだ」とする。

(1) 同じ意味。「私は猫が好きではないが、犬は好きだ」は $\neg A \wedge B$, 「私は猫が好きまたは犬が好きではない、というわけではない」は $\neg(A \vee \neg B)$ となる。$\neg A \wedge B$ と $\neg(A \vee \neg B)$ の真理値表は次の表 3 のようになるが、確かに両者の意味は常に一致している。

表 3: $\neg A \wedge B$ と $\neg(A \vee \neg B)$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \wedge B$	$\neg(A \vee \neg B)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F

(2) 同じ意味。「私は猫が好きまたは犬が好きではない」は $A \vee \neg B$, 「私は猫が好きではないが犬は好きだ、というわけではない」は $\neg(\neg A \wedge B)$ となる。$A \vee \neg B$ と $\neg(\neg A \wedge B)$ の真理値表は次の表 4 のようになるが、確かに両者の意味は常に一致している。

表 4: $A \vee \neg B$ と $\neg(\neg A \wedge B)$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge B$	$A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \wedge B)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

確認問題 9 (p. 12)

ド・モルガンの法則を用いてそれぞれ変形すれば、(1) $\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)$,

(2) $(A \lor \neg B) \land (\neg A \lor C)$ となる。

確認問題 10 (p. 14)

(1) 妥当である。A を「私は寝ている」、B を「私は夢をみている」とする。このとき、「私は寝ている。私が夢をみていないなら私は寝ていない。ゆえに、私は夢をみている」は、$A, \neg B \to \neg A$ から B への論証となる。$A \land (\neg B \to \neg A) \to B$ を X とおくと、次の表 5 から分かるように、X は恒真である。

表 5: $A \land (\neg B \to \neg A) \to B$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$	$A \land (\neg B \to \neg A)$	X
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

(2) 妥当ではない。A を「生物がいる」、B を「水がある」とする。このとき、「生物がいるなら水がある。水があるなら生物がいる。従って、生物がいるか水があるかのどちらか少なくとも一方だ」は、$A \to B, B \to A$ から $A \lor B$ への論証となる。$(A \to B) \land (B \to A) \to A \lor B$ を Y とおくと、次の表 6 から分かるように、Y は恒真ではない。

表 6: $(A \to B) \land (B \to A) \to A \lor B$ の真理値表

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$A \lor B$	$(A \to B) \land (B \to A)$	Y
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	F

確認問題 11 (p. 16)

妥当である。A を「不正行為をする」、B を「試合に負ける」、C を「非難される」とする。このとき、「不正行為をしなければ試合に負ける。不正行為をすれば非難される。しかし、試合に負けても非難される。よって、いずれにせよ非難される」は、$\neg A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$ から C への論証となる。$\neg A \rightarrow B$ を X, $A \rightarrow C$ を Y, $B \rightarrow C$ を Z とおくと、次の表 7 から分かるように、$X \wedge Y \wedge Z \rightarrow C$ は恒真である。

表 7: $(\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$ の真理値表

A	B	C	$\neg A$	X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Y \wedge Z$	$X \wedge Y \wedge Z \rightarrow C$
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T

確認問題 12 (p. 22)

次のように定めれば、二つの真理保存性を満たす。

$\leftrightarrow$ 規則

$$\begin{array}{c} A_1 \leftrightarrow A_2 \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} A_1 & \neg A_1 \\ A_2 & \neg A_2 \end{array} \end{array}$$

$\neg\leftrightarrow$ 規則

$$\begin{array}{c} \neg(A_1 \leftrightarrow A_2) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} A_1 & \neg A_1 \\ \neg A_2 & A_2 \end{array} \end{array}$$

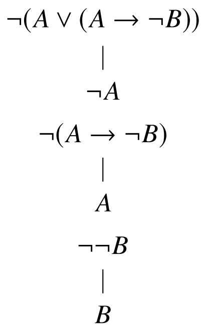
このような記号 $\leftrightarrow$ のことを同値記号という。第 1 章の演習問題 3 でもこ

の記号を扱っている。

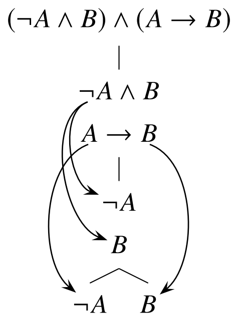
確認問題 13 (p. 25)

それぞれ、次のようになる。

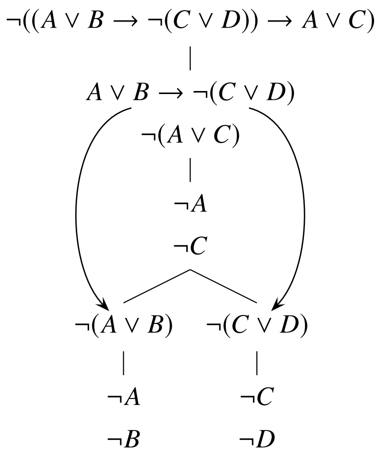
(1)



(2)

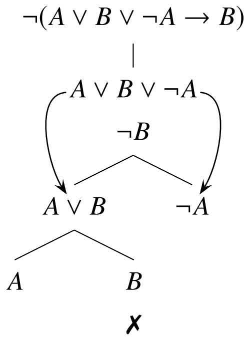


(3)



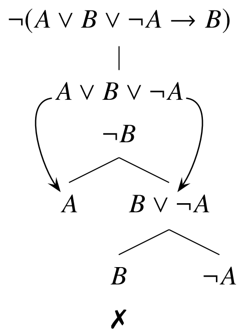
確認問題 14 (p. 28)

(1) $\neg(A \vee B \vee \neg A \to B)$ のタブローを描くと、次のようになる。



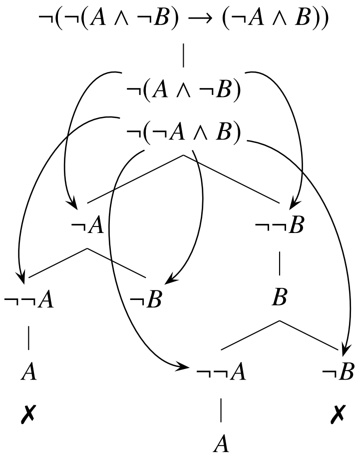
よって、反例は次の二通り。(i) A が真かつ B が偽となる。(ii) A と B が共に偽となる。従って、$A \vee B \vee \neg A \not\models B$ となる。このタブローには A と $\neg A$ が共に現れているが、両者は別の枝に現れているので、それらの枝は開くということに注意せよ。

別解 $\neg(A \vee B \vee \neg A \to B)$ を $\neg((A \vee B) \vee \neg A \to B)$ とみなしてタブローを描いたが、$\neg(A \vee (B \vee \neg A) \to B)$ とみなして描いてもよい。すると、次のようになるが、同じ反例が得られる。



---

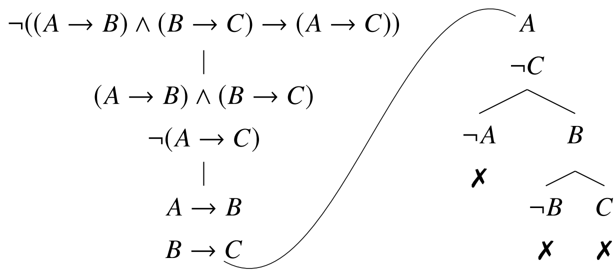
(2) $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \to (\neg A \wedge B))$ のタブローを描くと、次のようになる。



よって、反例は次の二通り。(i) A と B が共に偽となる。(ii) A と B が共に真となる。従って、$\neg(A \land \neg B) \not\models \neg A \land B$ となる。

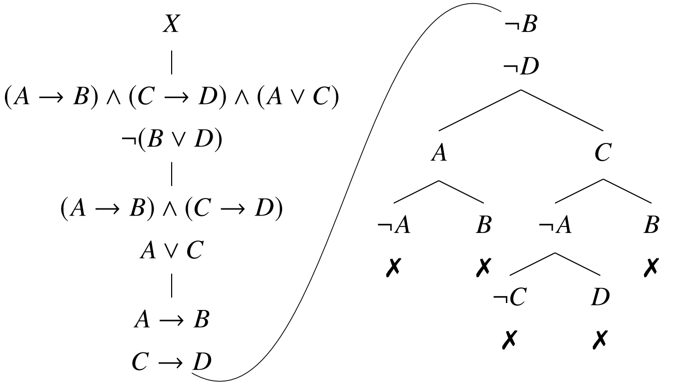
確認問題 15 (p. 31)

(1) $\neg((A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C))$ のタブローを描くと、次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



よって、タブローは閉じるので、$A \to B, B \to C \models A \to C$ となる。

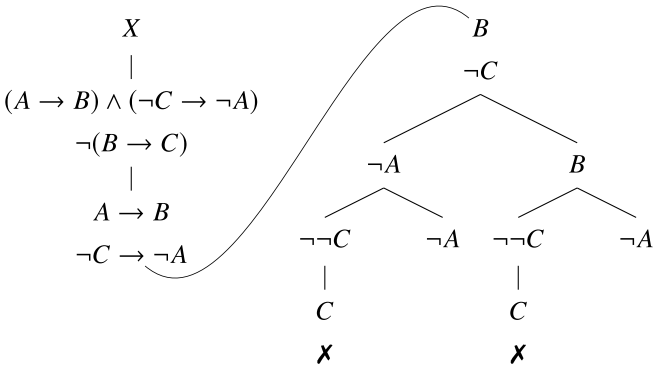
(2) $\neg((A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \to B \lor D)$ を X とおいた上で、X のタブローを描くと次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



よって、タブローは閉じるので、$A \to B, C \to D, A \lor C \models B \lor D$ となる。

確認問題 16 (p. 31)

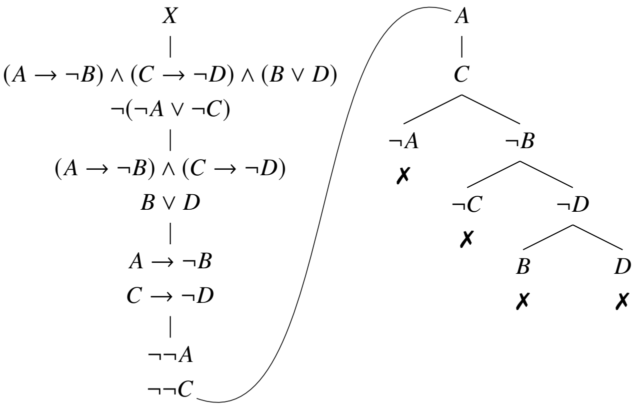
(1) A を「原因がある」、B を「結果がある」、C を「因果関係がある」とすると、$A \to B, \neg C \to \neg A$ から $B \to C$ への論証となるので、$\neg((A \to B) \land (\neg C \to \neg A) \to (B \to C))$ を X とおいた上で、X のタブローを描くと次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



すると、このようにタブローは開くので、論証は妥当ではない。

(2) A を「善人がいる」、B を「悪がある」、C を「悪人がいる」、D を

「善がある」とすると、$A \to \neg B, C \to \neg D, A \vee C$ から $B \vee D$ への論証となるので、$\neg((A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D) \wedge (A \vee C) \to (B \vee D))$ を X とおいた上で、X のタブローを描くと次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



すると、このようにタブローは閉じるので、論証は妥当である。

確認問題 17 (p. 33)

④のみ。①は間違い。なぜなら、完全性の対偶をとれば、$A_1 \vee A_2$ のタブローが閉じることがないなら $\neg(A_1 \vee A_2)$ は恒真ではないから。②も間違い。なぜなら、健全性の対偶をとれば、$\neg(A_1 \wedge A_2)$ が恒真ではないなら $A_1 \wedge A_2$ のタブローが閉じることはないから。③も間違い。なぜなら、A_1 が A で、A_2 が $\neg A$ のとき、$\neg(A \vee \neg A)$ は恒真ではないが、$\neg A \wedge \neg\neg A$ のタブローは閉じるから。④は正しい。なぜなら、完全性の対偶をとれば、$A_1 \wedge A_2$ のタブローが閉じることがないなら $\neg A_1 \vee \neg A_2$ は恒真ではないから。

確認問題 18 (p. 40)

(1) 固有名ではなく、一般名。(2) 固有名。c を「東京」とすると、「東京」の意味は $V(c)$ となる。(3) 固有名ではなく、指標詞。(4) 固有名。c を「徳川家康」とすると、「徳川家康」の意味は $V(c)$ となる。

確認問題 19 (p. 43)

(1) 個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は犬好きである」とすると、「犬好きの人がいる」は $(\exists x)P(x)$ となる。

(2) 個体領域が全ての人間からなるとき、$P(x)$ を「x は犬好きである」とすると、「人は犬が好きだ」は $(\forall x)P(x)$ となる。

(3) 個体領域が全ての植物からなるとき、$P(x)$ を「x は生物である」とすると、「あらゆる植物は生物でもある」は $(\forall x)P(x)$ となる。

(4) 個体領域が全ての物からなるとき、$P(x)$ を「x は赤い」とすると、「ある物が存在して、それは赤い」は $(\exists x)P(x)$ となる。

確認問題 20 (p. 43)

個体領域が全ての人間からなるとき、$P_1(x)$ を「x は論理学が得意である」、$P_2(x)$ を「x は数学が得意である」とする。このとき、(1) $\neg(\forall x)P_1(x)$, (2) $(\exists x)\neg P_1(x)$, (3) $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$, (4) $(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$, (5) $(\forall x)P_1(x) \to (\forall x)P_2(x)$, (6) $(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ となる。

確認問題 21 (p. 47)

②と④のみ。①は、$\neg P(x)$ の x が自由変項なので、閉論理式ではない。

$$(\forall x)P(x) \vee \neg P(x) \to P(c)$$

②は、個体変項が一切現れないので閉論理式である。③は、$P(x)$ の x が自由変項なので、閉論理式ではない。

$$(\exists x)\neg P(x) \to P(x) \wedge (\forall x)P(x)$$

④は、$\neg P(x)$ および $P(x)$ の x が共に束縛変項なので、閉論理式である。

$$\neg P(c_1) \to (\forall x)(\neg P(x) \vee P(x))$$

注意 ③は、$(\exists x)(\neg P(x)) \to P(x) \wedge (\forall x)P(x)$ の省略形なので、$(\exists x)$ の作用域は $\neg P(x)$ であって、$\neg P(x) \to P(x)$ ではない。

確認問題 22 (p. 47)

$V(P_1)$ は $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, $V(P_2)$ は $\{-4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ となる。まず、$17 \in V(P_1)$ なので $P_1(17)$ の意味は真、$83 \notin V(P_2)$ なので $P_2(83)$ の意味は偽となる。さらに、例えば $4 \in D$ に対して $4 \notin V(P_1)$ となるので、任意の $d \in D$ に対して $d \in V(P_1)$ となるわけではない。よって、$(\forall x)P_1(x)$ の意味は偽となる。また、例えば $2 \in D$ に対して $2 \in V(P_2)$ となるので、ある $d \in D$ に対して $d \in V(P_2)$ となる。よって、$(\exists x)P_2(x)$ の意味は真となる。

確認問題 23 (p. 51)

(1) 下の表 8 から分かるように、$P_2(c_2) \to (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の意味は真となる。ただし、$P_2(c_2) \to (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ を X とおいた。

表 8: $P_2(c_2) \to (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ の真理値表

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_2(c_2)$	$P_1(x) \to P_2(x)$	$(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$	X
c_1	T	F	-	F		
c_2	F	T	T	T	T	T
c_3	F	F	-	T		

(2) 下の表 9 から分かるように、$(\forall x)((P_1(c_1) \vee P_2(c_3)) \wedge P_3(x))$ の意味は偽となる。ただし、$(\forall x)((P_1(c_1) \vee P_2(c_3)) \wedge P_3(x))$ を Y とおいた。

(3) 下の表 10 から分かるように、$\neg(\exists x)(P_3(x) \wedge \neg P_3(x))$ の意味は真となる。ただし、$\neg(\exists x)(P_3(x) \wedge \neg P_3(x))$ を Z とおいた。

(4) 下の表 11 から分かるように、$(\forall x)(P_1(x) \to (\exists x)P_3(x))$ の意味は

表 9: $(\forall x)((P_1(c_1) \vee P_2(c_3)) \wedge P_3(x))$ の真理値表

x	$P_1(c_1)$	$P_2(c_3)$	$P_3(x)$	$P_1(c_1) \vee P_2(c_3)$	$(P_1(c_1) \vee P_2(c_3)) \wedge P_3(x)$	Y
c_1	T	-	F		F	
c_2	-	-	T	T	T	F
c_3	-	F	T		T	

表 10: $\neg(\exists x)(P_3(x) \wedge \neg P_3(x))$ の真理値表

x	$P_3(x)$	$\neg P_3(x)$	$P_3(x) \wedge \neg P_3(x)$	$(\exists x)(P_3(x) \wedge \neg P_3(x))$	Z
c_1	F	T	F		
c_2	T	F	F	F	T
c_3	T	F	F		

真となる。$(\forall x)(P_1(x) \to (\exists x)P_3(x))$ を W とおいた。

表 11: $(\forall x)(P_1(x) \to (\exists x)P_3(x))$ の真理値表

x	$P_1(x)$	$P_3(x)$	$(\exists x)P_3(x)$	$P_1(x) \to (\exists x)P_3(x)$	W
c_1	T	F		F	
c_2	F	T	T	T	T
c_3	F	T		T	

確認問題 24 (p. 53)

(1) 妥当である。個体領域が全ての物体からなるとき、$P_1(x)$ を「x には形がある」、$P_2(x)$ を「x は変化する」とすると、「全ての物体には形がある。形ある物体は全て変化する。ゆえに、全ての物体は変化する」は、$(\forall x)P_1(x), (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ から $(\forall x)P_2(x)$ への論証となる。この論証が妥当になるということを示すためには、任意の解釈の下で、$(\forall x)P_1(x)$ と $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ が共に真なら $(\forall x)P_2(x)$ も真になるということを示せばよい。$(\forall x)P_1(x)$ が真

であるとは、任意の $d = V(c) \in D$ に対して、$P_1(c)$ が真になるということである。このとき、$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$ が真であることから、$P_1(c) \to P_2(c)$ も真になる。よって、$P_2(c)$ は真になるので、$(\forall x)P_2(x)$ も真になる。

(2) 妥当ではない。個体領域が全ての三角形からなるとき、$P_1(x)$ を「x は内角の和が二直角よりも大きい」、$P_2(x)$ を「x は球面上にある」とすると、「内角の和が二直角よりも大きい三角形がある。内角の和が二直角よりも大きい三角形があるなら、その三角形は球面上にある。従って、ある三角形は球面上にある」は、$(\exists x)P_1(x), (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ から $(\exists x)P_2(x)$ への論証となる。この論証が妥当ではないということを示すためには、$(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x)P_2(x)$ には反例があるということを示せばよい。実は、$D = \{d_1, d_2\}, V(c_1) = d_1, V(c_2) = d_2, V(P_1) = \{d_2\}, V(P_2) = \emptyset$ という解釈を与えれば、下の表 12 から分かるように、この解釈は $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x)P_2(x)$ を偽にする。ただし、$(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x)P_2(x)$ を X とおいた。

表 12: $(\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x)P_2(x)$ の真理値表

x	$P_1(x)$	$(\exists x)P(x)$	$P_2(x)$	$P_1(x) \to P_2(x)$	$(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$
c_1	F	T	F	T	T
c_2	T		F	F	

x	$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$	$(\exists x)P_2(x)$	X
c_1	T	F	F
c_2			

確認問題 25 (p. 55)

(1) $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \not\models (\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ となるので、同じ意味にならない。

- $D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P_1) = \{d_1\}$, $V(P_2) = \{d_2\}$ という解釈を与えれば、下の表 13 から分かるように、この解釈は $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \rightarrow (\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ を偽にするので、反例になっている。ただし、$(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \rightarrow (\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ を X とおいた。

表 13: $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \rightarrow (\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$ の真理値表

<table>
<tr><th>x</th><th>$P_1(x)$</th><th>$P_2(x)$</th><th>$P_1(x) \vee P_2(x)$</th><th>$(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>F</td><td>T</td><td>T</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x</th><th>$(\forall x)P_1(x)$</th><th>$(\forall x)P_2(x)$</th><th>$(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)$</th><th>$X$</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>c_2</td></tr>
</table>

(2) 同じ意味になる。

- $(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ が真であるとは、ある $d = V(c) \in D$ に対して、$P_1(c) \vee P_2(c)$ が真になるということなので、$P_1(c)$ と $P_2(c)$ のどちらか少なくとも一方は真となる。よって、$(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ も真となる。従って、$(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \models (\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ となる。
- $(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)$ が真であるとは、ある $d_1 = V(c_1) \in D$, $d_2 = V(c_2) \in D$ に対して、$P_1(c_1)$ と $P_2(c_2)$ の少なくとも一方が真になるということなので、$P_1(c_1) \vee P_2(c_2)$ も真となる。よって、$P(c_1)$ と $P(c_2)$ のどちらか少なくとも一方も真となる。このとき、$P(c_1)$ が真であっても、$P(c_2)$ が真であっても、$(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ は真になる。従って、$(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x) \models (\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))$ となる。

確認問題 26 (p. 60)

$(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2) \not\models (\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ となるので、同じ意味になら

ない。

- $D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P) = \{(d_1, d_2), (d_2, d_1)\}$ という解釈を与えれば、下の表 14 から分かるように、この解釈は $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2) \to (\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ を偽にするので、反例になっている。ただし、$(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2)$ を X, $(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ を Y とおいた。

表 14: $(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1, x_2) \to (\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2)$ の真理値表

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$P(x_1, x_2)$</th><th>$P(x_1, c_1)$</th><th>$(\exists x_1)P(x_1, c_1)$</th><th>$P(x_1, c_2)$</th><th>$(\exists x_1)P(x_1, c_2)$</th><th>X</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_1</td><td>F</td><td>F</td><td rowspan="4">T</td><td>-</td><td rowspan="4">T</td><td rowspan="4">T</td></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_2</td><td>T</td><td>-</td><td>T</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>c_1</td><td>T</td><td>T</td><td>-</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>c_2</td><td>F</td><td>-</td><td>F</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$P(c_1, x_2)$</th><th>$(\forall x_2)P(c_1, x_2)$</th><th>$P(c_2, x_2)$</th><th>$(\forall x_2)P(c_2, x_2)$</th><th>Y</th><th>$X \to Y$</th></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_1</td><td>F</td><td rowspan="4">F</td><td>-</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">F</td><td rowspan="4">F</td></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_2</td><td>T</td><td>-</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>c_1</td><td>-</td><td>T</td></tr>
<tr><td>c_2</td><td>c_2</td><td>-</td><td>F</td></tr>
</table>

確認問題 27 (p. 66)

もしもその規則を適用する以前に c_i が現れていれば、その c_i は、何らかの ψ に対して $\psi[c_i/x]$ という形で現れている。このとき、ψ を満たすような c_i が φ も同時に満たすとは限らないので、既に現れた c_i を $\exists$ 規則や $\neg\forall$ によって導入することはできない。

確認問題 28 (p. 70)

まず、c_2 と c_3 は $\exists$ 規則の適用以前に現れていないので、$V(c_2) = d_3$ と $V(c_3) = d_2$ を削除することで解釈 I_2 を得る。次に、新たに $V(c_2) = d_2$ と定めることで解釈 I_3 を得る。このとき、I_3 の下で $(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ と $P_1(c_2) \to P_2(c_2)$ は共に真となる。

確認問題 29 (p. 74)

(1) 妥当ではない。個体領域が全てのロボットからなるとき、c_1 を「ドラえもん」、$P_1(x)$ を「x はネコ型である」、$P_2(x)$ を「x は未来からやってきた」とすると、「ドラえもんはネコ型ロボットだ。あるロボットは、それがネコ型なら未来からやってきた。ゆえに、ドラえもんは未来からやってきた」は、$P_1(c_1), (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x))$ から $P_2(c_1)$ への論証となるので、$\neg(P_1(c_1) \land (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to P_2(c_1))$ のタブローを描くと次のようになる。

$$\begin{array}{c}
\neg(P_1(c_1) \land (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \to P_2(c_1)) \\
| \\
P_1(c_1) \land (\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\
\neg P_2(c_1) \\
| \\
P_1(c_1) \\
(\exists x)(P_1(x) \to P_2(x)) \\
| \\
P_1(c_2) \to P_2(c_2) \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\neg P_1(c_2) \qquad P_2(c_2)
\end{array}$$

すると、このようにタブローは開くので、論証は妥当ではない。

(2) 妥当である。個体領域が全ての命題からなるとき、$P_1(x)$ を「x は真だ」、$P_2(x)$ を「x は偽だ」とすると、「全ての命題は真か偽のどちらか少なくとも一方だ。従って、ある命題は真か偽のどちらか少なくとも一方だ」は、$(\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x))$ から $(\exists x)(P_1(x) \lor P_2(x))$ への論証となるので、$\neg((\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \to (\exists x)(P_1(x) \lor P_2(x)))$ のタブローを描くと次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \to (\exists x)(P_1(x) \lor P_2(x))) \\
| \\
(\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \\
\neg(\exists x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \\
| \\
P_1(c_1) \lor P_2(c_1) \\
| \\
\neg(P_1(c_1) \lor P_2(c_1)) \\
| \\
\neg P_1(c_1) \\
\neg P_2(c_1) \\
\diagup \quad \diagdown \\
P_1(c_1) \qquad P_2(c_1) \\
\text{✗} \qquad\qquad \text{✗}
\end{array}
$$

すると、このようにタブローは閉じるので、論証は妥当である。

確認問題 30 (p. 77)

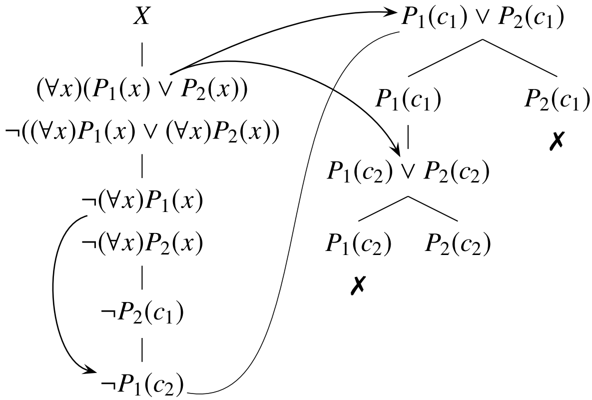
(1) 妥当ではない。$\neg((\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \to (\forall x)P_1(x) \lor (\forall x)P_2(x))$ を X とおけば、X のタブローは次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
X \\
| \\
(\forall x)(P_1(x) \lor P_2(x)) \\
\neg((\forall x)P_1(x) \lor (\forall x)P_2(x)) \\
| \\
\neg(\forall x)P_1(x) \\
\neg(\forall x)P_2(x) \\
| \\
\neg P_1(c_1) \\
| \\
\neg P_2(c_2)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
P_1(c_1) \lor P_2(c_1) \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{c} P_1(c_1) \\ \text{✗} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} P_2(c_1) \\ | \\ P_1(c_2) \lor P_2(c_2) \\ \diagup \quad \diagdown \\ P_1(c_2) \qquad P_2(c_2) \\ \qquad\qquad \text{✗} \end{array}
\end{array}
$$

よって、$P_2(c_1)$ と $P_1(c_2)$ が真、$P_1(c_1)$ と $P_2(c_2)$ が偽となるように解釈を定めれば反例が得られる。例えば、$D = \{d_1, d_2\}, V(c_1) = d_1,$

$V(c_2) = d_2$, $V(P_1) = \{d_2\}$, $V(P_2) = \{d_1\}$ とすればよい。

別解 次のようなタブローを描いてもよい。



この場合、$P_1(c_1)$ と $P_2(c_2)$ が真、$P_2(c_1)$ と $P_1(c_2)$ が偽となるように解釈を定めれば反例が得られる。例えば、$D = \{d_1, d_2\}$, $V(c_1) = d_1$, $V(c_2) = d_2$, $V(P_1) = \{d_1\}$, $V(P_2) = \{d_2\}$ とすればよい。

---

(2) 妥当である。$\neg((\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x) \to (\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)))$ を Y とおけば、次のように Y のタブローは閉じる。

(3) 妥当である。$\neg((\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \to (\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x))$ を Z とおけば、次のように Z のタブローは閉じる。

$$\begin{array}{c}
Y \\
| \\
(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x) \\
\neg(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \\
| \\
\neg(P_1(c_1) \vee P_2(c_1)) \\
| \\
\neg P_1(c_1) \\
\neg P_2(c_1) \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
(\forall x)P_1(x) & (\forall x)P_2(x) \\
| & | \\
P_1(c_1) & P_2(c_1) \\
\text{✗} & \text{✗}
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
Z \\
| \\
(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \\
\neg((\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x)) \\
| \\
\neg(\exists x)P_1(x) \\
\neg(\exists x)P_2(x) \\
| \\
P_1(c_1) \vee P_2(c_1) \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
P_1(c_1) & P_2(c_1) \\
| & | \\
\neg P_1(c_1) & \neg P_2(c_1) \\
\text{✗} & \text{✗}
\end{array}
\end{array}$$

(4) 妥当である。$\neg((\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x) \to (\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x)))$ のタブローは閉じる。

$$\begin{array}{c}
\neg((\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x) \to (\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x))) \\
| \\
(\exists x)P_1(x) \vee (\exists x)P_2(x) \\
\neg(\exists x)(P_1(x) \vee P_2(x)) \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
(\exists x)P_1(x) & (\exists x)P_2(x) \\
| & | \\
P_1(c_1) & P_2(c_1) \\
| & | \\
\neg(P_1(c_1) \vee P_2(c_1)) & \neg(P_1(c_1) \vee P_2(c_1)) \\
| & | \\
\neg P_1(c_1) & \neg P_1(c_1) \\
\neg P_2(c_1) & \neg P_2(c_1) \\
\text{✗} & \text{✗}
\end{array}
\end{array}$$

確認問題 31 (p. 80)

(1) $\neg((\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1,x_2))$ のタブローは閉じるので、判定可能かつ妥当。

$$
\begin{array}{c}
\neg((\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1,x_2)) \\
| \\
(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2) \\
\neg(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1,x_2) \\
| \\
(\forall x_2)P(c_1,x_2) \\
| \\
\neg(\exists x_1)P(x_1,c_2) \\
| \\
P(c_1,c_2) \\
| \\
\neg P(c_1,c_2) \\
\text{✗}
\end{array}
$$

(2) $\neg((\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1,x_2) \to (\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2))$ を X とおくと、X のタブローは完成しない上に閉じないので、判定可能ではない。

$$
\begin{array}{ccc}
X & \quad & \neg P(c_2,c_3) \\
| & & | \\
(\forall x_2)(\exists x_1)P(x_1,x_2) & & (\exists x_1)P(x_1,c_3) \\
\neg(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1,x_2) & & | \\
| & & P(c_4,c_3) \\
(\exists x_1)P(x_1,c_1) & & | \\
| & & \neg(\forall x_2)P(c_4,x_2) \\
P(c_2,c_1) & & | \\
| & & \neg P(c_4,c_5) \\
\neg(\forall x_2)P(c_2,x_2) & & | \\
 & & \vdots
\end{array}
$$

確認問題 32 (p. 83)

ヒンティッカ集合 S に現われる全ての個体定項を $c_1, c_2, c_3, \ldots$ とする。

このとき、任意の $i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$D = \{d_i\}, V(c_i) = d_i$, S に現れる任意の述語記号 P に対して、$V(P) = \{(d_1, d_2, d_3, \ldots) : P(c_1, c_2, c_3, \ldots) \in S\}$ という解釈を与えれば、S の要素は全て同時に真になる。なぜなら、$V(P)$ の定め方から、$P(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ が真になるということの必要十分条件が $P(c_1, c_2, c_3, \ldots) \in S$ となるからである。

確認問題 33 (p. 85)

ア：③　イ：①

> φ がある解釈の下で真なら、タブローの **健全性** の対偶から、$\boxed{\varphi}$ のタブローは開く。

φ がある解釈の下で真なら、$\neg\varphi$ には反例があるので、$\neg\varphi$ は妥当ではない。よって、健全性の対偶から、φ のタブローは開く。

第 1 章の演習問題 (p. 16) の解答

演習問題 1

$\neg A \to \neg B$ の真理値表を描くと、下の表 15 のようになる。

表 15: $\neg A \to \neg B$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

よって、$(x, y) = (1, 1)$, $(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) = (0, 0)$ を代入すれば 1, $(x, y) = (0, 1)$ を代入すれば 0 となるような選択肢を見つければよい。しかし、選択肢は四つあるので、$4 \times 4 = 16$ 回も代入を行わなければならず、手間がかかる。そこで、選択肢に現われる、絶対値、掛け算、最大値という三つの記号が何を意味するのかを考える。a, b を 1 か 0 とすれば、それぞれ次のようになる。

(i) $1 - a$ は、$a = 1$ ならば 0, $a = 0$ ならば 1 となるので、$\neg$ に対応する。

(ii) 掛け算 $a \times b$ は、$(a, b) = (1, 1)$ ならば 1, $(a, b) = (1, 0), (a, b) = (0, 1), (a, b) = (0, 0)$ ならば 0 となるので、$\wedge$ に対応する。

(iii) 最大値 $\max(a, b)$ は、$(a, b) = (1, 1), (a, b) = (1, 0), (a, b) = (0, 1)$ ならば 1, $(a, b) = (0, 0)$ ならば 0 となるので、$\vee$ に対応する。

$\neg A \to \neg B$, $A \vee \neg B$, $\neg(\neg A \wedge B)$ はどれも同じ意味なので、$1 - a$, $a \times b$, $\max(a, b)$ の三つを用いて $N(A \vee \neg B)$ および $N(\neg(\neg A \wedge B))$ をつくればよい。すると、前者は $\max(x, 1 - y)$, 後者は $1 - (1 - x) \times y$ となる。よって、

答えは ② および ④ となる。また、 ① は $N(\neg A \vee B)$, ③ は $N(\neg(A \wedge \neg B))$ となるので、 ① および ③ は正解ではないことも分かる。

演習問題 2

(1)「K さん、L さん、M さんの内から二人以上を任意に選んだとき、選ばれた人たち全員がその案に賛成する」は、$(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$ あるいは $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$ となる。

注意 二人以上を任意に選ぶので、$(A \vee B) \wedge (B \vee C)$ あるいは $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$ などは不正解。この場合、選んだ二人の中に必ず L さんが含まれてしまう。また、分配法則から $(B \vee (A \wedge C)) \wedge (C \vee A)$ あるいは $(B \wedge (A \vee C)) \vee (C \wedge A)$ などは正解になる。

---

(2) $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$ を X, $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$ を Y とおくと、X と Y は同じ意味になるということが下の表 16 と表 17 から分かる。

表 16: $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$ の真理値表

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$C \vee A$	$(A \vee B) \wedge (B \vee C)$	X
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

表 17: $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$ の真理値表

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$C \wedge A$	$(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$	Y
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

演習問題 3

(1) A を「K さんは正直者である」、B を「L さんは正直者である」とする。A が真なら K さんの主張は真になり、その逆も成り立つので、A と K さんの主張 $A \wedge \neg B$ は同じ意味になる。同様にして、B と L さんの主張 $\neg B \wedge \neg A$ も同じ意味になる。つまり、任意の命題 A_1, A_2 に対して、A_1 と A_2 が同じ意味になるときのみ $A_1 \leftrightarrow A_2$ が真、それ以外の場合は偽となるように、記号 $\leftrightarrow$ を定義すれば、$(A \leftrightarrow A \wedge \neg B) \wedge (B \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A))$ が真になればよい。$(A \leftrightarrow A \wedge \neg B) \wedge (B \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A))$ を X とおくと、X の真理値表は下の表 18 のようになる。よって、K さんは正直者で、L さんは嘘つきということになる。このような記号 $\leftrightarrow$ のことを同値記号という。確認問題 12 (p. 22) でもこの記号を扱っている。

参考 L さんの主張に現われる、「私は嘘つきだ」という部分だけを取り出せば、ある種の嘘つきのパラドックスとして知られている文になる。つまり、L さんは正直者か嘘つきのどちらか一方だが、次に示すように、いずれの場合も矛盾して

表 18: $(A \leftrightarrow A \wedge \neg B) \wedge (B \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A))$ の真理値表

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg B \wedge \neg A$	$A \leftrightarrow A \wedge \neg B$	$B \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$	X
T	T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F	F

しまう。

(i) もしも L さんが正直者なら L さんの主張は真になるので、L さんは嘘つきということになる。よって、矛盾する。

(ii) もしも L さんが嘘つきなら L さんの主張は偽になるので、L さんは正直者ということになる。よって、矛盾する。

以上の内容を命題論理で表してみよう。A を「L さんは正直者だ」とすると、A が真なら L さんの主張 $\neg A$ は真になり、その逆も成り立つので、$A \leftrightarrow \neg A$ は真になるはずである。しかし、下の表 20 から分かるように、$A \leftrightarrow \neg A$ が真になることはない。

表 19: $A \leftrightarrow \neg A$ の真理値表

A	$\neg A$	$A \leftrightarrow \neg A$
T	F	F
F	T	F

(2) A を「K さんは正直者である」、B を「L さんは正直者である」、C を「M さんは正直者である」とする。(1) と同様に考えれば、$(A \leftrightarrow \neg C) \land (B \leftrightarrow (\neg A \to B)) \land (C \leftrightarrow (B \to \neg C))$ が真になればよい。$A \leftrightarrow \neg C$ を Y_1, $B \leftrightarrow (\neg A \to B)$ を Y_2, $C \leftrightarrow (B \to \neg C)$ を Y_3, $(A \leftrightarrow \neg C) \land (B \leftrightarrow (\neg A \to B)) \land (C \leftrightarrow (B \to \neg C))$ を Y とおくと、Y の真理値表は下の表 20 のようになる。よって、K さんは嘘つき、L さんも嘘つき、M さんは正直者ということになる。

表 20: $(A \leftrightarrow \neg C) \land (B \leftrightarrow (\neg A \to B)) \land (C \leftrightarrow (B \to \neg C))$ の真理値表

A	B	C	$\neg C$	$\neg A$	$\neg A \to B$	$B \to \neg C$	Y_1	Y_2	Y_3	Y
T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
T	T	F	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	F	T	F	F

演習問題 4

(1) A_1, A_2 を任意の命題とする。排他的選言 $\veebar$ の定義から、$A_1 \veebar A_2$ の真理値表は下の表 21 ようになる。
よって、真理値表が上から順に T, T, T, F となるような命題と上から順に F, T, T, T となるような命題を $\land$ で接続すればよい。前者は $A \lor B$, 後者は $\neg(A \land B)$ が該当するので、両者を $\land$ で接続した $(A \lor B) \land \neg(A \land B)$ が $A \veebar B$ と同じ意味をもつ命題になる。しかし、これでは「論理結合子は $\neg$ と $\lor$ のみを用いよ」という問題の条件を満たさないので、ド・モルガンの法則を用いて $\neg(\neg(A \lor B) \lor \neg(\neg A \lor \neg B))$ に変形する。これが求めていた答えで

表 21: $A_1 \veebar A_2$ の真理値表

A_1	A_2	$A_1 \veebar A_2$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ある。

(2) (1) において $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ と $A \veebar B$ が同じ意味になるということが分かったので、「論理結合子は $\neg$ と $\rightarrow$ のみを用いよ」という問題の条件を満たすように $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ を変形すればよい。すると、$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ を得る。

演習問題 5

a: I,　b: I,　c: F,　d: F,　e: I,　f: T,　g: T,　h: I,　i: I,　j: I

表 22: $A \wedge B$ と $A \vee B$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F
T	I	**I**	**T**
I	T	**I**	**T**
F	I	**F**	**I**
I	F	**F**	**I**
I	I	**I**	**I**

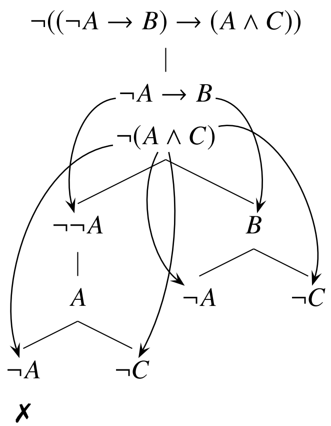
A と B どちらか一方が F であれば、もう片方が T でも F でも $A \wedge B$ は F

になる。また、A と B どちらか一方が T であれば、もう片方が T でも F でも $A \wedge B$ は T になる。このように、T でも F でもない第三の真理値を扱う論理のことを三値論理という。

第 2 章の演習問題 (p. 34) の解答

演習問題 1

(1) $(\neg A \to B) \to (A \wedge C)$ を否定した $\neg((\neg A \to B) \to (A \wedge C))$ のタブローを描くと次のようになる。



よって、一見すると次の六通りの場合が反例となるように思える。

(i) A は真、B は真、C は偽となる。

(ii) A は真、B は偽、C は偽となる。

(iii) A は偽、B は真、C は真となる。

(iv) A は偽、B は真、C は偽となる。

(v) A は真、B は真、C は偽となる。

(vi) A は偽、B は真、C は偽となる。

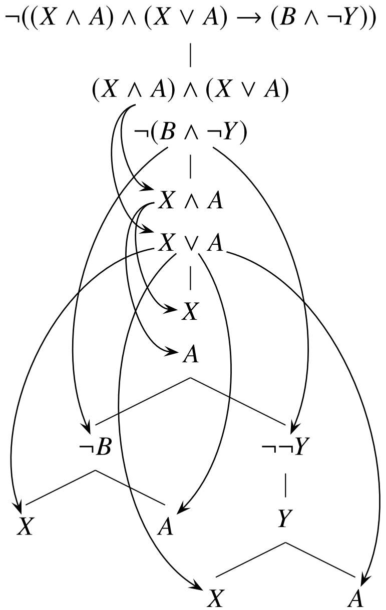
しかし、よく見てみると、(i) と (v), (iv) と (vi) は同じなので、実際には四通りとなる。

(2) 存在しない。なぜなら、(1) で求めた四通りの場合のみを全ての反例とする命題は、その四通りの場合にのみ偽になり、それ以外の場合には真になるので、$(\neg A \to B) \to (A \wedge C)$ と同じ意味になる

から。

演習問題 2

$\neg((X \wedge A) \wedge (X \vee A) \to (B \wedge \neg Y))$ のタブローを描くと次のようになる。



このタブローが閉じるためには、X が $\neg A$ もしくは B となればよい。X が $\neg A$ のとき、Y は $A, B, \neg A, \neg B$ の内のどれであってもよいので、四通りある。X が B のとき、Y は $\neg A$ もしくは $\neg B$ となればよいので、二通りある。従って、全部で六通りある。

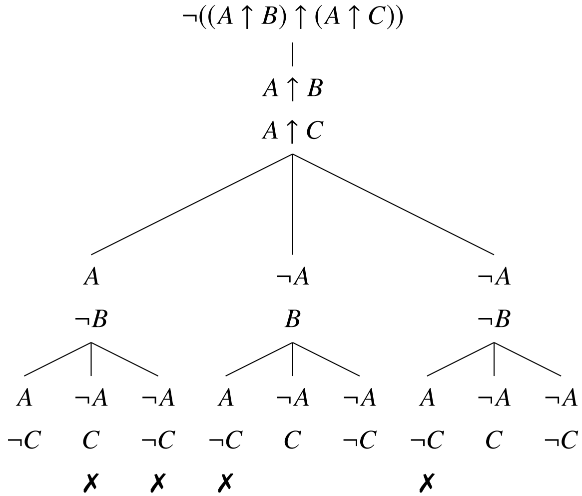
演習問題 3

$A_1, \ldots, A_n$ から A_{n+1} を導く論証が妥当になるということを示すためには、$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1}$ が常に真になるということを示さなければならない。しかし、K さんが考えた手順において、たとえ (3) (i) の条件が満たされたとしても、$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A_{n+1}$ が真になることがある、ということが示されるにすぎない。よって、K さんが考えた手順では、論

証の妥当性を正しく判定できない。

演習問題 4

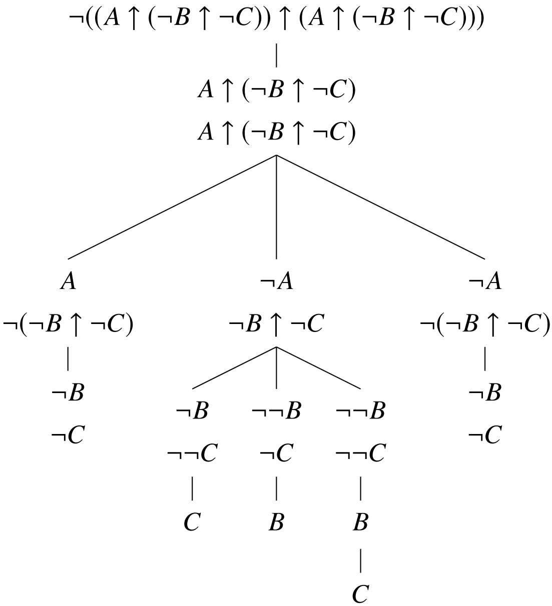
$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)$ を否定した $\neg((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C))$ のタブローを描くと次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



よって、次の五通りの場合が反例になる。

(i) A は真、B は偽、C は偽となる。
(ii) A は偽、B は真、C は真となる。
(iii) A は偽、B は真、C は偽となる。
(iv) A は偽、B は偽、C は真となる。
(v) A は偽、B は偽、C は偽となる。

一方で、$(A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C)) \uparrow (A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C))$ を否定した $\neg((A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C)) \uparrow (A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C)))$ のタブローを描くと次のようになる。ただし、煩雑になるので補助線は省略した。



よって、次の五通りの場合が反例になる。

(i) A は真、B は偽、C は偽となる。
(ii) A は偽、B は偽、C は真となる。
(iii) A は偽、B は真、C は偽となる。
(iv) A は偽、B は真、C は真となる。
(v) A は偽、B は偽、C は偽となる。

従って、$(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow C)$ と $(A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C)) \uparrow (A \uparrow (\neg B \uparrow \neg C))$ の反例は全て一致するので、両者は同じ意味になる。

演習問題 5

ア：⑨　イ：③　ウ：①

A_0 のタブローと $\neg A_0$ のタブローが共に **閉じる** と仮定する。$\neg A_0$

のタブローは $\boxed{\textbf{閉じる}}$ ので、タブローの $\boxed{\textbf{健全性}}$ から、A_0 は恒真になる。よって、$\boxed{\neg A_0}$ は恒真ではないので、$\boxed{\neg A_0}$ には反例がある。つまり、$\neg\neg A_0$ のタブローは開く。従って、A_0 のタブロー $\boxed{\textbf{閉じる}}$ ことはないので、仮定に反する。

ア：最後の文にある「仮定に反する」という部分に注目すればよい。恒真になるのはタブローではなく命題なので、④は不適切。

イ：タブローの無矛盾性とは、A_0 のタブローと $\neg A_0$ のタブローが共に閉じることはない、という性質のことを言う。つまり、この問題では、タブローの無矛盾性を示そうとしている。よって、⑥は不適切。

ウ：「任意の命題」は A_0 のことも指すので、⑤は不適切。

第 3 章の演習問題 (p. 60) の解答

演習問題 1

(1) 個体領域が全ての仕事と全ての人からなるとき、$P_1(x)$ を「x は仕事である」、$P_2(x)$ を「x は大変だ」、$P_3(x)$ を「x は人である」、$P_4(x)$ を「x は頑張って働いている」とすると、「どの仕事も大変だが、誰もが頑張って働いている」は、「全ての仕事と全ての人は、それが仕事なら大変だが、全ての仕事と全ての人は、それが人なら頑張って働いている」と言い換えることができるので、

$$(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(P_3(x) \to P_4(x))$$

と記号化される。

注意 $(\forall x)(P_1(x) \to P_2(x)) \wedge (\forall x)(P_3(x) \to P_4(x))$ を X とおく。

(i) 個体領域を全ての仕事からなる集合とすると、X は「どの仕事も大変だが、どの仕事も頑張って働いている」となってしまうので誤り。働くのは人であって、仕事ではない。同様に、個体領域を全ての人からなる集合とすると、X は「どの人も大変だが、どの人も頑張って働いている」となってしまうので誤り。大変なのは仕事であって、人ではない。

(ii)「全ての仕事からなる個体領域 D_1」と「全ての人からなる個体領域 D_2」の二つを用意して、X に現われる左側の $(\forall x)$ が言及する個体全体からなる集合には D_1, 右側の $(\forall x)$ が言及する個体全体からなる集合には D_2 を割り当てればよいと思うかもしれないが、個体領域の定義から、

このように二つ以上の異なる個体領域を用意することはできないので誤り。

(iii) 個体領域が全ての仕事と全ての人からなるとき、X ではなく、

$$(\forall x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \wedge (\forall x)(P_3(x) \wedge P_4(x))$$

と記号化するのは誤り。なぜなら、この閉論理式は、「全ての仕事と全ての人は、仕事かつ大変な上に、全ての仕事と全ての人は、人かつ頑張って働いている」ということを表すからである。この文によれば、全ての人が仕事かつ大変で、全ての仕事が人かつ頑張って働いていれば真になるので、「どの仕事も大変だが、誰もが頑張って働いている」という元の文の主張とは全く異なる。

---

(2) 個体領域が全ての人と全ての議案からなるとき、$P_1(x)$ を「x は人である」、$P_2(x)$ を「x は議会を欠席する」、$P_3(x)$ を「x は議案である」、$P_4(x)$ を「x は可決される」とすると、「議会を欠席する人がいても、可決される議案がある」は、「全ての人と全ての議案の中には、それが人かつ議会を欠席するようなものがある上に、全ての人と全ての議案の中には、それが議案かつ可決されるようなものもある」と言い換えることができるので、

$$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \wedge (\exists x)(P_3(x) \wedge P_4(x))$$

と記号化される。

注意 $(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x)) \wedge (\exists x)(P_3(x) \wedge P_4(x))$ を Y とおく。

(a) 個体領域を全ての人からなる集合とすると、Y は「議会を欠席する人がいても、可決される人がいる」となってしまうの

で誤り。可決されるのは議案であって、人ではない。同様に、個体領域を全ての議案からなる集合とすると、Y は「議会を欠席する議案があっても、可決される議案がある」となってしまうので誤り。議会を欠席するのは人であって、議案ではない。

(b) 「全ての人からなる個体領域 D_1」と「全ての議案からなる個体領域 D_2」の二つを用意して、Y に現われる左側の $(\exists x)$ が言及する個体全体からなる集合には D_1, 右側の $(\exists x)$ が言及する個体全体からなる集合には D_2 を割り当てればよいと思うかもしれないが、個体領域の定義から、このように二つ以上の異なる個体領域を用意することはできないので誤り。

(c) 個体領域が全ての人と全ての議案からなるとき、Y ではなく、

$$(\exists x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \land (\exists x)(P_3(x) \rightarrow P_4(x))$$

と記号化するのは誤り。なぜなら、この閉論理式は、$(\exists x)(\neg P_1(x) \lor P_2(x)) \land (\exists x)(\neg P_3(x) \lor P_4(x))$ と同じ意味なので、「ある人もしくは議案は、それが人ではないか議会を欠席する上に、ある人もしくは議案は、それが議案ではないか可決される」ということを表すからである。この文によれば、人ではない議案と議案ではない人がいれば真になるので、「議会を欠席する人がいても、可決される議案がある」という元の文の主張とは全く異なる。まだ納得できなければ、次のように考えてみるとよい。もしも個体領域が全ての個体からなるとき、$P_1(x)$ を「x は石である」、$P_2(x)$ を「x は生きている」としたとき、「ある石は生きている」という文を $(\exists x)(P_1(x) \rightarrow P_2(x))$ と記号化してよいのであれば、これは $(\exists x)(\neg P_1(x) \lor P_2(x))$ と同じ意味であり、「石ではない」もしくは「生きている」ようなものが存在するので、この文は真

になる。しかし、生きている石は存在しないはずである。一方で、$(\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$ と記号化すれば、石かつ生きているものは存在しないので、この文は偽になる。

演習問題 2

個体領域が全ての人からなるとき、c_1 を「アインシュタイン」、$P(x)$ を「x は相対性理論を思いつける」とすると、「どんな人も、その人が相対性理論を思いつけるならアインシュタインにも思いつける」は、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ と記号化され、「相対性理論を思いつくことができる人がいるなら、アインシュタインにも思いつける」は、$(\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1)$ と記号化される。このとき、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1)) \models (\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1)$ かつ $(\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1) \models (\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ となる。その理由を次に述べる。

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ と $(\exists x)P(x)$ が共に真であると仮定して、$P(c_1)$ が真になるということを示せばよい。$(\exists x)P(x)$ が真であるとは、ある $d_2 = V(c_2)$ に対して、$P(c_2)$ が真になるということであり、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ が真であるとは、任意の $d_3 = V(c_3) \in D$ に対して、$P(c_3) \rightarrow P(c_1)$ が真になるということなので、$P(c_2) \rightarrow P(c_1)$ も真になる。よって、$P(c_2)$ と $P(c_2) \rightarrow P(c_1)$ が共に真となるので、$P(c_1)$ も真になる。従って、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1)) \models (\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1)$ となる。
- $(\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1)$ が真であるとは、ある $d_4 = V(c_4)$ に対して、$P(c_4) \rightarrow P(c_1)$ が真になるということである。
  - (i) $P(c_1)$ が真なら、任意の $d_5 = V(c_5)$ に対して、$P(c_5) \rightarrow P(c_1)$ は真になる。よって、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ も真になる。
  - (ii) $P(c_1)$ が偽なら、$(\exists x)P(x) \rightarrow P(c_1)$ が真であるということから、$(\exists x)P(x)$ は偽になるので、任意の $d_5 = V(c_5)$ に対して、$P(c_5)$ は偽になるので、$P(c_5) \rightarrow P(c_1)$ は真になる。よって、$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(c_1))$ も真になる。

従って、$(\exists x)P(x) \to P(c_1) \models (\forall x)(P(x) \to P(c_1))$ となる。

演習問題 3

個体領域が有限集合 $\{d_1, \ldots, d_n\}$ のとき、$(\forall x)\neg\varphi(x)$ が真であるとは、$\neg\varphi[c_1/x] \wedge \cdots \wedge \neg\varphi[c_n/x]$ が真になるということであり、$\neg(\exists x)\varphi(x)$ が真であるとは、$\neg(\varphi[c_1/x] \vee \cdots \vee \varphi[c_n/x])$ が真になるということである。ド・モルガンの法則によれば、$\neg\varphi[c_1/x] \wedge \cdots \wedge \neg\varphi[c_n/x]$ と

$$\neg(\varphi[c_1/x] \vee \varphi[c_2/x]) \wedge \neg\varphi[c_3/x] \wedge \cdots \wedge \neg\varphi[c_n/x]$$

は同じ意味になる。さらに、もう一度ド・モルガンの法則を用いれば、

$$\neg(\varphi[c_1/x] \vee \varphi[c_2/x] \vee \varphi[c_3/x]) \wedge \neg\varphi[c_4/x] \wedge \cdots \wedge \neg\varphi[c_n/x]$$

と同じ意味になることが分かる。このように、ド・モルガンの法則を繰り返し用いることで、最終的には $\neg(\varphi[c_1/x] \vee \cdots \vee \varphi[c_n/x])$ と同じ意味になる。

演習問題 4

(1) 個体領域が全ての鳥からなるとき、$P(x)$ を「x は空を飛べる」とすると、「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥がいる」は $(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ となる。このとき、任意の解釈の下で、次の (i) と (ii) のいずれの場合も $(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ は真になる。

(i) $(\forall x)P(x)$ が真なら、$P(x) \to (\forall x)P(x)$ の後件が真になるので、任意の $d = V(c_1) \in D$ に対して、$P(c_1) \to (\forall x)P(x)$ は真になる。よって、$(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ も真になる。

(ii) $(\forall x)P(x)$ が偽なら、「任意の $d = V(c_2) \in D$ に対して、$P(c_2)$ が真になる」わけではないので、ある $d = V(c_3) \in D$ に対して、$P(c_3)$ は偽になる。よって、$P(c_3) \to (\forall x)P(x)$ は真になる。よって、$(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ も真になる。

(2) 直観的には、「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥がいる」という文を「空を飛べるということが全ての鳥は空を飛べるということの原因になっているような鳥がいる」、言い換えれば、「空を飛べるということが真であって偽ではないなら『全ての鳥は空を飛べる』も真にするような鳥（d_3 に相当）がいる」と考えてしまいがちだが、(1) でみたように、そもそも $(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ が真であるということを示すために「d_3 が空を飛べる」が真であるということは使っていない。なぜなら、論理結合子 $\to$ は実質含意を表わしているからである。実際、(1) の (i) では、$(\forall x)P(x)$ が真なので $P(c_3)$（ある特殊な $P(c_1)$）が真であっても偽であっても $(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ は真になり、(1) の (ii) でも、$P(c_3)$ が偽であるがゆえに $(\exists x)(P(x) \to (\forall x)P(x))$ は真になった。このように、(1) では、$P(c_3)$ が真であるという条件を一度も使っていない。よって、「『空を飛べるなら全ての鳥は空を飛べる』ような鳥がいる」という文を因果関係として理解する直観は間違っている。

演習問題 5

$P(x_1, x_2)$ を「x_1 は x_2 の髭を剃る」とする。

(1) $(\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1, x))$ から $P(c_1, c_1)$ への論証が妥当になるということを示せばよい。$(\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1, x))$ が真であるとは、任意の $d_2 = V(c_2) \in D$ に対して、$\neg P(c_2, c_2) \to P(c_1, c_2)$ が真になるということである。

(i) $\neg P(c_2, c_2)$ が真なら、$\neg P(c_2, c_2) \to P(c_1, c_2)$ が真であるということから、$P(c_1, c_2)$ も真になる。このとき、c_2 は任意の個体定項だったので、$P(c_1, c_1)$ も真になる。一方で、$\neg P(c_2, c_2)$ が真であるという仮定と、c_2 は任意の個体定項であるということから、$\neg P(c_1, c_1)$ も真になるので、矛盾する。よって、背理法から、$\neg P(c_2, c_2)$ が真となることはない。

(ii) $\neg P(c_2, c_2)$ が偽なら、$P(c_2, c_2)$ は真になる。このとき、c_2 は任

意の個体定項だったので、$P(c_1, c_1)$ も真になる。

このように、任意の解釈の下で、$P(c_1, c_1)$ は真になるので、$(\forall x)(\neg P(x, x) \to P(c_1, x)) \models P(c_1, c_1)$ となる。

(2) $(\forall x)(P(c_1, x) \to \neg P(x, x))$ から $\neg P(c_1, c_1)$ への論証が妥当になるということを示せばよい。$(\forall x)(P(c_1, x) \to \neg P(x, x))$ が真であるとは、任意の $d_2 = V(c_2) \in D$ に対して、$P(c_1, c_2) \to \neg P(c_2, c_2)$ が真になるということである。

(i) $P(c_1, c_2)$ が真なら、$P(c_1, c_2) \to \neg P(c_2, c_2)$ が真であるということから、$\neg P(c_2, c_2)$ も真になる。このとき、c_2 は任意の個体定項だったので、$\neg P(c_1, c_1)$ も真になる。一方で、$P(c_1, c_2)$ が真であるという仮定と、c_2 は任意の個体定項であるということから、$P(c_1, c_1)$ も真になるので、矛盾する。よって、背理法から、$P(c_1, c_2)$ が真となることはない。

(ii) $P(c_1, c_2)$ が偽なら、$\neg P(c_1, c_2)$ は真になる。このとき、c_2 は任意の個体定項だったので、$\neg P(c_1, c_1)$ も真になる。

このように、任意の解釈の下で、$\neg P(c_1, c_1)$ は真になるので、$(\forall x)(P(c_1, x) \to \neg P(x, x)) \models \neg P(c_1, c_1)$ となる。

(3) 自身の髭を剃らない全ての人の髭だけを剃る唯一の理容師が存在すると仮定する。このとき、(1) と (2) から、そのような理容師が自身の髭を剃ると仮定しても、剃らないと仮定しても矛盾が発生する。よって、背理法から、そのような理容師は存在しない。このような、「自身の髭を剃らない全ての人の髭だけを剃る唯一の理容師は、自分自身の髭を剃ることも剃らないこともできない」というパラドックスは、床屋のパラドックスと呼ばれている。

第 4 章の演習問題 (p. 85) の解答

演習問題 1

(1) 閉じない。(2) 閉じる。(3) 閉じない。(4) 閉じる。タブローはそれぞれ次のようになる。

(1)
$$\begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \land \neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ P(c_1) \land \neg(\forall x)P(x) \\ | \\ P(c_1) \\ \neg(\forall x)P(x) \\ | \\ \neg P(c_2) \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \land \neg(\exists x)P(x)) \\ | \\ P(c_1) \land \neg(\exists x)P(x) \\ | \\ P(c_1) \\ \neg(\exists x)P(x) \\ | \\ \neg P(c_1) \\ \times \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{c} (\exists x)(P(x) \land \neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ P(c_1) \land \neg(\forall x)P(x) \\ | \\ P(c_1) \\ \neg(\forall x)P(x) \\ | \\ \neg P(c_2) \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{c} (\exists x)(P(x) \land \neg(\exists x)P(x)) \\ | \\ P(c_1) \land \neg(\exists x)P(x) \\ | \\ P(c_1) \\ \neg(\exists x)P(x) \\ | \\ \neg P(c_1) \\ \times \end{array}$$

演習問題 2

$P(x_1, x_2)$ を「x_1 は x_2 の髭を剃る」とする。

(1) $(\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1, x))$ から $P(c_1, c_1)$ への論証が妥当になるということを示せばよい。そこで、$\neg((\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1,x)) \to$

$P(c_1, c_1))$ のタブローを描くと次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1,x)) \to P(c_1,c_1)) \\
| \\
(\forall x)(\neg P(x,x) \to P(c_1,x)) \\
\neg P(c_1,c_1) \\
| \\
\neg P(c_1,c_1) \to P(c_1,c_1) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\neg\neg P(c_1,c_1) & P(c_1,c_1) \\
| & \text{✗} \\
P(c_1,c_1) & \\
\text{✗} &
\end{array}
\end{array}
$$

すると、このようにタブローは閉じるので、示された。

(2) $(\forall x)(P(c_1, x) \to \neg P(x, x))$ から $\neg P(c_1, c_1)$ への論証が妥当になるということを示せばよい。そこで、$\neg((\forall x)(P(c_1, x) \to \neg P(x, x)) \to \neg P(c_1, c_1))$ のタブローを描くと次のようになる。

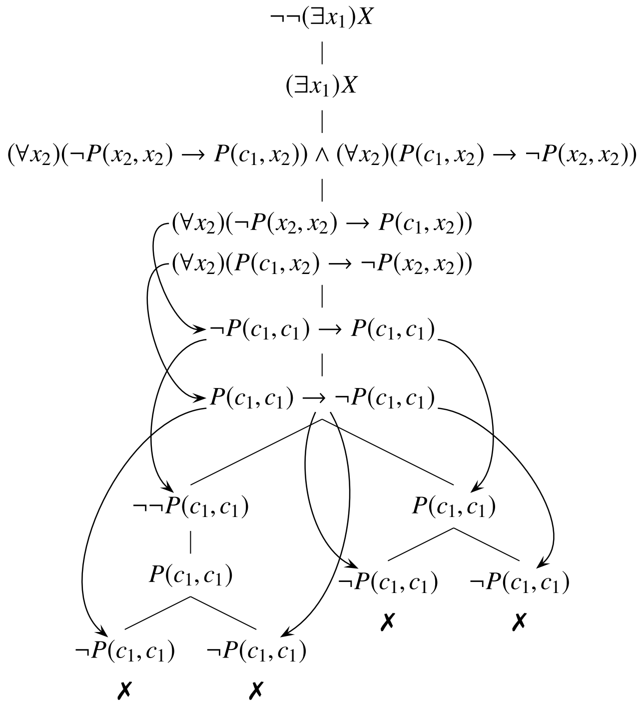
$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x)(P(c_1,x) \to \neg P(x,x)) \to \neg P(c_1,c_1)) \\
| \\
(\forall x)(P(c_1,x) \to \neg P(x,x)) \\
\neg\neg P(c_1,c_1) \\
| \\
P(c_1,c_1) \\
| \\
P(c_1,c_1) \to \neg P(c_1,c_1) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\neg P(c_1,c_1) & \neg P(c_1,c_1) \\
\text{✗} & \text{✗}
\end{array}
\end{array}
$$

すると、このようにタブローは閉じるので、示された。

(3)「自身の髭を剃らない全ての人の髭だけを剃る唯一の理容師が存在しない」は、

$$(\forall x_2)(\neg P(x_2, x_2) \to P(x_1, x_2)) \wedge (\forall x_2)(P(x_1, x_2) \to \neg P(x_2, x_2))$$

を X とおいたとき、$\neg(\exists x_1)X$ となる。そこで、$\neg\neg(\exists x_1)X$ のタブローを描けばよい。

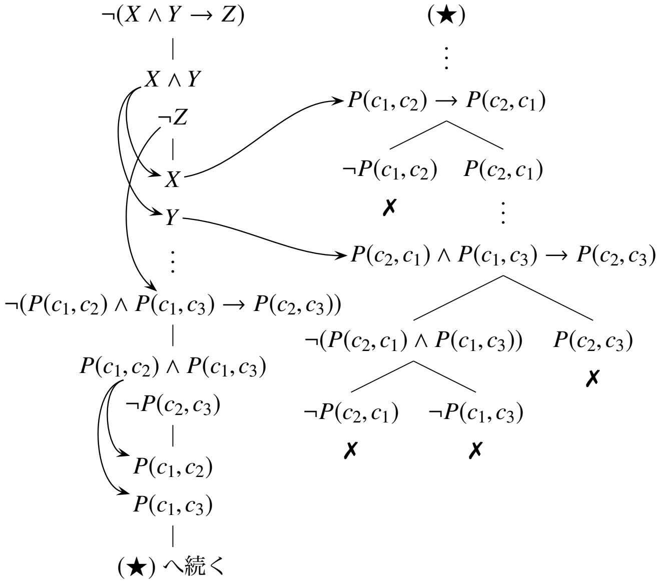


すると、このようにタブローは閉じるので、示された。

演習問題 3

$(\forall x_1)(\forall x_2)(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1))$ を X，$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3))$ を Y，$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(P(x_1, x_2) \wedge P(x_1, x_3) \to P(x_2, x_3))$ を Z とおく。

(1) $X \wedge Y \to Z$ が妥当になるということを示せばよい。そこで、$\neg(X \wedge Y \to Z)$ のタブローを描くと次のようになる。ただし、説明がなくても容易に補える部分については、点線を用いて省略した。

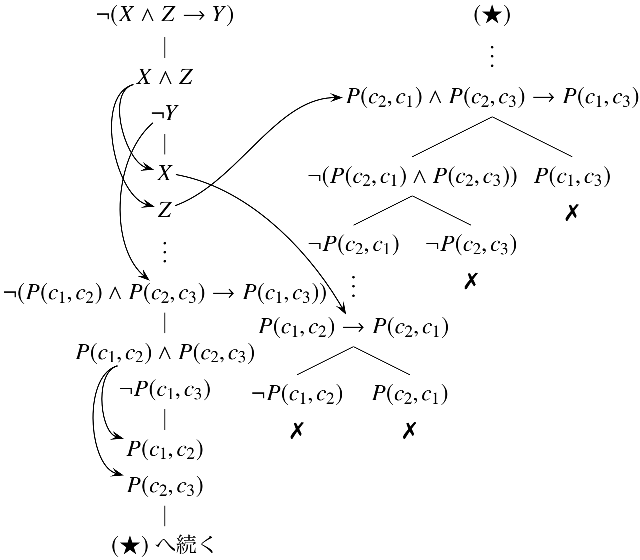


すると、このようにタブローは閉じるので、示された。

考え方 $\neg(X \wedge Y \wedge Z \to X \wedge W)$ のタブローを描こうとしたとき、$\neg\forall$ 規則を $\forall$ 規則よりも先に適用しなければならないということから、(★) の手前（$P(c_1, c_3)$ の部分）までは容易に描くことができるだろう。問題は、その先である。そこで注目するのが、(★) よりも上の部分に既に現れている $\neg P(c_2, c_3)$ という閉論理式である。このタブローが閉じるためには、どうにかして $P(c_2, c_3)$ をつくればよい。そこで、まだ規則を適用していない X と Y を使って $P(c_2, c_3)$ をつくる。こうして得られるのが (★) よりも先の部分である。

---

(2) $X \wedge Z \to Y$ が妥当になるとなることを示せばよい。そこで、$\neg(X \wedge Z \to Y)$ のタブローを描くと次のようになる。ただし、説明がなくても容易に補える部分については、点線を用いて省略した。



すると、このようにタブローは閉じるので、示された。

考え方 (1) と同様に、(★) よりも上の部分に既に現れている $\neg P(c_1, c_3)$ という閉論理式に注目する。このタブローが閉じるためには、どうにかして $P(c_1, c_3)$ をつくればよい。そこで、まだ規則を適用していない X と Z を使って $P(c_1, c_3)$ をつくる。こうして得られるのが (★) よりも先の部分である。

演習問題 4

妥当である。少なく人も一人の人間に教える人のことを教師と呼ぶことにしたので、「x_1 は教師である」は $(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ と表わすことができる。よって、「教師は誰からも教わる。自分自身に教える人がいる。よって、どんな人にも、その人から教わる人がいる」は、$(\forall x_1)((\exists x_2)P(x_1, x_2) \to (\forall x_2)P(x_2, x_1))$, $(\exists x_1)P(x_1, x_1)$ から $(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2)$ への論証となるので、

$$\neg((\forall x_1)((\exists x_2)P(x_1,x_2) \to (\forall x_2)P(x_2,x_1)) \wedge (\exists x_1)P(x_1,x_1) \to (\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2))$$

を X とおいた上で、X のタブローを描くと次のようになる。ただし、補助線は省略した。

$$\begin{array}{c}
X \\
| \\
(\forall x_1)((\exists x_2)P(x_1,x_2) \to (\forall x_2)P(x_2,x_1)) \wedge (\exists x_1)P(x_1,x_1) \\
\neg(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1,x_2) \\
| \\
(\forall x_1)((\exists x_2)P(x_1,x_2) \to (\forall x_2)P(x_2,x_1)) \\
(\exists x_1)P(x_1,x_1) \\
| \\
\neg(\exists x_2)P(c_1,x_2) \\
| \\
P(c_2,c_2) \\
| \\
(\exists x_2)P(c_2,x_2) \to (\forall x_2)P(x_2,c_2) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\neg(\exists x_2)P(c_2,x_2) & (\forall x_2)P(x_2,c_2) \\
| & | \\
\neg P(c_2,c_2) & \neg P(c_1,c_2) \\
\text{✗} & | \\
 & P(c_1,c_2) \\
 & \text{✗}
\end{array}
\end{array}$$

すると、このようにタブローは閉じるので、論証は妥当である。

演習問題 5

存在しない。$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ を有限個の記号からなる閉論理式 φ に現われる全ての個体定項、$c_{n+1}, c_{n+2}, c_{n+3}, \ldots, c_{n+m}$ を φ に適用できる ∃ 規則もしくは ¬∀ 規則によって導入される全ての個体定項とする。このとき、φ には ∀ 規則や ¬∃ 規則をそれぞれ最大で $n+m$ 回しか適用することができない。よって、有限回の規則の適用によって、φ のタブローが閉じるかどうかということが決定される。つまり、単項述語論理は決定可能である。

注意 §4.4 で述べたように、同じ閉論理式 $(\exists x)\varphi(x)$ に対して、∃ 規則や ¬∀ 規則を二回以上適用してはならないので、無限個の個体定項が新たに導入されることはない。

索引

高木 翼（たかぎ つばさ）
略歴
1997 年 東京都に生まれる
2015 年 日本物理学会 Jr. セッション審査員特別賞受賞
現在　法政大学文学部哲学科在学中
論文
「K4 タブローによる妥当性判定と濾過法」
（Journal of Science and Philosophy, 2019 年）
https://orcid.org/0000-0001-9890-1015

形式論理探求
第 1 巻 古典論理のタブロー

2019 年 5 月 31 日 初版 オンデマンド版発行

著者
高木 翼

発行者
飯澤 正登実

発行所
やまなみ書房
〒252-0143 神奈川県相模原市緑区橋本 2-7-9 古川荘 201 さがみ進学プラザ内
https://www.yamanami.tokyo/
books@yamanami.tokyo

初版 オンデマンド版 ISBN 978-4-909624024

9784909624024

$$\neg\neg(\exists x_1)((\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(x_1,x_2)) \wedge (\forall x_2)(P(x_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2)))$$

$$(\exists x_1)((\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(x_1,x_2)) \wedge (\forall x_2)(P(x_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2)))$$

$$(\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(c_1,x_2)) \wedge (\forall x_2)(P(c_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2))$$

$$(\forall x_2)(\neg P(x_2,x_2) \to P(c_1,x_2))$$

$$(\forall x_2)(P(c_1,x_2) \to \neg P(x_2,x_2))$$

$$\neg P(c_1,c_1) \to P(c_1,c_1)$$

$$P(c_1,c_1) \to \neg P(c_1,c_1)$$

$$\neg\neg P(c_1,c_1) \qquad P(c_1,c_1)$$

$$P(c_1,c_1) \qquad \neg P(c_1,c_1) \qquad \neg P(c_1,c_1)$$

$$✗ \qquad ✗$$

$$\neg P(c_1,c_1) \qquad \neg P(c_1,c_1)$$

$$✗ \qquad ✗$$