査読論文

K4タブローによる妥当性判定と濾過法

高木 翼
https://orcid.org/0000-0001-9890-1015

法政大学 文学部 哲学科
〒 102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1

2019 年 1 月 26 日原稿受付
Citation : 高木 翼 (2019). K4 タブローによる妥当性判定と濾過法.
Journal of Science and Philosophy, 2(1), 4–23.

Abstract

One of the difficulties of modal logic K4 is that the tableau may be infinitely long and the validity of a formula cannot be determined. However, an infinite counter-model of the formula can be constructed by finding a pattern of the infinitely long tableau. In order to transform the infinite counter-model into a finite counter-model, we should suppose that reflexibility holds in the part of the same infinite prefixed formula except for their prefixes. In this paper, I show that this transformation is the special case of filtration method.

1　はじめに

タブロー法は論理式の妥当性の判定手続きであり, 1950 年代に Beth (1955) と Hintikka (1953, 1955) によって独立に提案され, それぞれが提案したタブロー法は後に Smullyan (1995) によって洗練された。[1] 古典論理のタブロー法については, 和書なら, 神野・内井 (1976); 菅原 (1987); リチャード (1995); 斎藤 (1964); 丹治 (1999); 戸田山 (2000), 洋書なら, Fitting (1983, 1996); Smullyan (1995); d'Agostino (1999); Priest (2008) などを参照せよ。[2]

タブロー法における一つの困難は, タブローが無限に長く伸びることによって論理式の妥当性を判定できない場合があるということである。このような場合は古典命題論理や様相論理体系 K には存在しないが, 様相論理体系 K4 にはある。[3] しかし, そのような無限に長いタブローにある種の規則性を発見することで, その論理式の非有限反例モデルを構成することができる。その上で, このような非有限反例モデルを有限反例モデルに変換するためには, 冠頭部の違いを除いて一致する無限個の冠頭論理式が現われる部分に反射性を仮定すればよい。本稿では, この操作こそが実は濾過法 (filtration method) の特殊例に相当しているということを指摘する。

2　K における冠頭タブロー

§2 では, Fitting (1972) によって初めて提案された, 冠頭タブロー法と呼ばれる様相論理式の妥当性を判定するタブロー法を紹介する。

空ではない正の整数の有限列 σ のことを冠頭部 **(prefix)**, 様相論理の論理式 φ に対して定まる $\sigma : \varphi$ のことを冠頭論理式 **(prefixed formula)** と言う。以降では, $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k)$ かつ $\sigma' = (n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots, n_{l-1}, n_l)$ ならば, 列 $(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1} \ldots, n_{l-1}, n_l)$ のことを $\sigma.\sigma'$ と書くことにする。特に, $l = k + 1$ ならば $\sigma.\sigma'$ のことを $\sigma.n_{k+1}$ と書くことにする。

冠頭部 σ は可能世界の名前, 正の整数 n に対して定まる $\sigma.n$ は σ という

名前の可能世界から到達可能な可能世界の名前を表している。この記法を用いることによって, どのような経路によって与えられた可能世界に到達するのかということが一目瞭然になる。例えば, $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k)$ は

$$n_1 \longrightarrow (n_1, n_2) \longrightarrow (n_1, n_2, n_3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$$

という経路によって到達可能な可能世界の名前を表しているということが直ちに分かる。また, 冠頭論理式 $\sigma : \varphi$ は σ を伴う論理式 φ を表しており, $\sigma : \varphi$ が充足可能であるとは, φ が σ という名前の可能世界において充足可能であることを意味する。

W を可能世界の集合, R を W 上の到達可能関係, V を原子論理式と可能世界の組に真理値を割り当てる関数 (付値) , $M = (W, R, V)$ を Kripke モデル, $\models$ を充足可能関係とする。また, χ を冠頭論理式の集合, $\mathrm{pre}(\chi)$ を χ の要素の冠頭部全体からなる集合とする。このとき, $w_0 \in W$ が継起的 **(serial)** であるとは, ある $w_1 \in W$ が存在して $w_0 R w_1$ となることを言い, 関数 $I : \mathrm{pre}(\chi) \to W$ が解釈 **(interpretation)** であるとは, $I(\sigma)$ が継起的ならば, ある正の整数 n が存在して $I(\sigma) R (I(\sigma.n))$ となることを言う。また, 冠頭論理式 $\sigma : \varphi$ が Kripke フレーム $F = (W, R)$ 上で充足可能 **(satisfiable)** であるとは, ある Kripke モデル $M = (W, R, V)$ が存在して $(M, I(\sigma)) \models \varphi$ となることを言い, $\sigma : \varphi$ が Kripke フレーム $F = (W, R)$ 上で妥当 **(valid)** であるとは, 任意の Kripke モデル $M = (W, R, V)$ に対して $(M, I(\sigma)) \models \varphi$ となることを言う。

$1 : \varphi$ に次のような充足可能な冠頭論理式を別の充足可能な論理式に変形する規則を可能な限り適用することで得られる図のことを $1 : \varphi$ の冠頭タブロー **(prefixed tableau)** と言う。

α 規則	β 規則	二重否定除去則	ν_K 規則	π 規則
$\dfrac{\sigma : \alpha}{\sigma : \alpha_1 \quad \sigma : \alpha_2}$	$\dfrac{\sigma : \beta}{\sigma : \beta_1 \mid \sigma : \beta_2}$	$\dfrac{\sigma : \neg\neg\varphi}{\sigma : \varphi}$	$\dfrac{\sigma : \nu}{\sigma.n : \nu_0}$	$\dfrac{\sigma : \pi}{\sigma.n : \pi_0}$

ただし,

- ν_K 規則の枝の下にある $\sigma.n$ は, その規則を適用する前に既に現れているような任意の冠頭部
- π 規則の枝の下にある $\sigma.n$ は, その規則を適用する前に現れていないような新しい冠頭部

とする。また, これらの規則は適用可能なときに直ちに適用する必要はなく, 一旦他の適用可能な規則を適用した後でもその規則を適用することができる。[4] さらに, 論理式 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \nu, \nu_0, \pi, \pi_0$ は次の表 1 と表 2 によって決定されるものとする。

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	φ_1	φ_2	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	φ_1	φ_2
$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$	$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\neg(\varphi_1 \to \varphi_2)$	φ_1	$\neg\varphi_2$	$\varphi_1 \to \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	φ_2

表 1　α 規則と β 規則

ν_K 規則は $\sigma : \nu$ が充足可能ならば $\sigma.n : \nu_0$ も充足可能になること, π 規則は $\sigma : \pi$ が充足可能ならば $\sigma.n : \pi_0$ も充足可能になることをそれぞれ表している。そして, これらの規則に課せられている条件は次のようにして説明することができる。

まず, π 規則については, $\sigma : \pi$ が充足可能ならば, それを充足可能にするよ

ν	ν_0	π	π_0
$\Box\varphi$	φ	$\Diamond\varphi$	φ
$\neg\Diamond\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\Box\varphi$	$\neg\varphi$

表 2　ν_K 規則と π 規則

うな $M = (W, R, V)$ および I は, 充足可能関係の定義から $I(\sigma)R(I(\sigma.n))$ を満たすようなある $I(\sigma.n)$ に対して $\sigma.n : \pi_0$ を充足可能にする。よって, π 規則によって, 暗に R が $I(\sigma)R(I(\sigma.n))$ を満たしているということが仮定される。もしも $\sigma.n$ がその π 規則を適用する前に現れた冠頭論理式 φ_0 の冠頭部であれば, $\sigma.n$ は φ_0 を充足可能にするような冠頭部であるということになる。しかし, その π 規則によって導入された $\sigma.n$ は任意の冠頭部ではなく, 「ある」冠頭部なので, φ_0 を充足可能にするとは限らない。従って, $\sigma.n$ はその π 規則を適用する前に現れていないようなある冠頭部でなければならない。

次に, ν_K 規則については, $\sigma : \nu$ が充足可能ならば, それを充足可能にするような $M = (W, R, V)$ および I は, $I(\sigma)R(I(\sigma.n))$ を満たすような任意の $I(\sigma.n)$ に対して $\sigma.n : \nu_0$ を充足可能にする。よって, ν_K 規則では, 暗に R が $I(\sigma)R(I(\sigma.n))$ を満たしているということが前提になっている。ところで, π 規則によって, 暗に $I(\sigma)R(I(\sigma.n))$ となることが仮定されたので, ν_K 規則によって導入される $\sigma.n$ はその ν_K 規則を適用する前に π 規則によって導入された $\sigma.n$ でなければならない。従って, $\sigma.n$ はその ν_K 規則を適用する前に現れているような任意の冠頭部でなければならない。

冠頭タブローの枝が閉じるとは, ある φ に対して, $\sigma : \varphi$ と $\sigma : \neg\varphi$ がその枝に現われることを言い, 閉じた枝には ✗ を付けることにする。また, 冠頭タブローが閉じるとは, その冠頭タブローの全ての枝が閉じることを言う。

冠頭タブローの枝が完成するとは, その枝に現われる全ての冠頭論理式のそれぞれに適用可能な規則が可能な限り適用されていることを言い, 冠頭タブローの枝が開くとは, その枝が完成していてかつ閉じていないことを言う。[5]

また, 冠頭タブローが開くとは, その冠頭タブローのある枝が開くことを言う。

$1 : \neg\varphi$ の冠頭タブローが閉じるとき, その冠頭タブローのことを φ の冠頭タブローによる証明と言う。

例 2.1 論理式 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ の冠頭タブローによる証明は次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
1 : \neg(\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)) \\
| \\
1 : \Box(\varphi \to \psi) \\
1 : \neg(\Box\varphi \to \Box\psi) \\
| \\
1 : \Box\varphi \\
1 : \neg\Box\psi \\
| \\
1,1 : \neg\psi \\
| \\
1,1 : \varphi \to \psi \\
| \\
1,1 : \varphi \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} 1,1 : \neg\varphi & 1,1 : \psi \\ \text{✗} & \text{✗} \end{array}
\end{array}
$$

ただし, どの冠頭論理式に規則を適用したかを分かりやすくするために, 規則を適用された論理式の真下に規則を適用した結果として得られる論理式がくる場合以外には, 規則を適用された論理式から規則を適用した結果として得られる論理式への矢印を付け加えた。

3　K 以外の様相論理体系における冠頭タブロー

§2 で述べた冠頭タブローは到達可能関係 R に何の条件も課されていないような様相論理 K における証明を形式化している。K よりも強い様相論理における証明を形式化するために, 新たに次のような適用条件をもつ規則 ν_T, ν_4, ν_5, ν_B を考えることにする。[6]

- ν_T 規則は σ が $I(\sigma)R(I(\sigma))$ を満たす場合にのみ適用することができる。
- ν_4 規則は $\sigma.\sigma'$ が $I(\sigma)R(I(\sigma.\sigma'))$ を満たす場合にのみ適用することができる。
- σ と σ' の長さが 2 以上のとき, ν_5 規則は σ' が $I(\sigma)R(I(\sigma'))$ を満たす場合にのみ適用することができる。
- ν_B 規則は σ が $I(\sigma.n)R(I(\sigma))$ を満たす場合にのみ適用することができる。

ν_T 規則	ν_4 規則	ν_5 規則	ν_B 規則
$\sigma : \nu$	$\sigma : \nu$	$\sigma : \nu$	$\sigma.n : \nu$
$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
$\sigma : \nu_0$	$\sigma.\sigma' : \nu_0$	$\sigma' : \nu_0$	$\sigma : \nu_0$

ただし, ν_4 規則と ν_5 規則の枝の下にある冠頭論理式の冠頭部はその規則を適用する前に既に現れている冠頭部とする。また, ν, ν_0 は表 2 によって決定されるものとする。

$\nu_K, \nu_T, \nu_4, \nu_5, \nu_B$ 規則を総称して ν 規則と呼ぶことにする。また,

- $\tau_1 \rhd_K \tau_2 :\Leftrightarrow \tau_1 = \sigma$ かつ $\tau_2 = (\sigma.n)$;
- $\tau_1 \rhd_T \tau_2 :\Leftrightarrow \tau_1 = \sigma$ および $\tau_2 = \sigma$ に対して $I(\tau_1)R(I(\tau_2))$;
- $\tau_1 \rhd_4 \tau_2 :\Leftrightarrow \tau_1 = \sigma$ および $\tau_2 = \sigma.\sigma'$ に対して $I(\tau_1)R(I(\tau_2))$;
- $\tau_1 \rhd_5 \tau_2 :\Leftrightarrow$ 長さ 2 以上の $\tau_1 = \sigma$ および $\tau_2 = \sigma'$ に対して $I(\tau_1)R(I(\tau_2))$;
- $\tau_1 \rhd_B \tau_2 :\Leftrightarrow \tau_1 = \sigma.n$ および $\tau_2 = \sigma$ に対して $I(\tau_1)R(I(\tau_2))$;

とする。

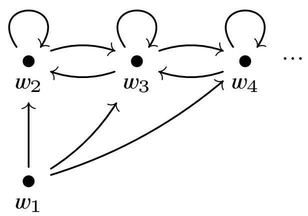
様相論理体系 T では R は反射性を満たすので, いつでも ν_T 規則を使うことができる。同様に, 様相論理体系 KB では R は対称性を満たすので, いつでも ν_B 規則を使うことができる。

また, 冠頭部はその名前をもつ可能世界に到達するために経由してきた可能世界の名前からなっているということを思い出せば, 様相論理 K4 では R は推移性を満たすので, 歯抜けのない直列な経路上の冠頭部 σ と $\sigma.\sigma'$ に対して ν_4 規則を使うことができる。ここで, 歯抜けのない直列な経路とは, 例えば,

$$n_1 \longrightarrow (n_1, n_2) \longrightarrow (n_1, n_2, n_3) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$$

という経路のことを指している。ここで, 「歯抜けのない」という条件には注意が必要である。K においては, §2 で述べたように, 冠頭部 $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k)$ が与えられれば, 直ちに上のような歯抜けのない経路を通って σ に到達したと考えることができる。しかし, それは ν_K 規則のみを考えている限りでは, 冠頭タブローのある枝 θ に $\sigma.n$ が現れれば, その一つ前の σ も θ に現われるということが保証されているからである。新たに ν_4 規則を考えるとなると, θ に $\sigma.\sigma'$ が現われたからといって, σ と $\sigma.\sigma'$ の間にある全ての冠頭部も θ に現われるということは保証されていない。そこで, 歯抜けのない経路のみを考えるために, 冠頭タブローに現われる全ての冠頭論理式の冠頭部からなる集合 $\mathrm{pre}(\chi)$ は強生成 **(strongly generated)** であるということを仮定する。これは, 正の整数 n に対して $(\sigma.n) \in \mathrm{pre}(\chi)$ ならば $\sigma \in \mathrm{pre}(\chi)$ となるという条件である。

最後に, 任意の可能世界 w_1 から Euclid 性を満たすような R によって到達可能な可能世界 $w_2, w_3, w_4, \ldots$ の間の到達可能関係は反射的かつ対称的かつ推移的, つまり同値関係になるので, 長さ 2 以上の σ と σ' に対して ν_5 規則を使うことができる。[7] このことを図で書けば次のようになる。



従って, 様相論理体系 K5 ではいつでも ν_5 規則を使うことができる。さらに, 上の図において, w_1 から伸びる矢印のみが反射性を満たしていないが, 様相

論理体系 KT5 あるいは S5 では, w_1 から伸びる矢印も含めた全ての矢印が反射性を満たすことになる。このとき, Euclid 性によって, 任意の可能世界から w_1 へ矢印が伸びるので, 全ての矢印は同値関係になる。つまり, S5 の到達可能関係は同値関係であるということが分かる。

4　完全性定理

§3 では, 冠頭タブローの枝が完成するということをその枝に現われる全ての冠頭論理式のそれぞれに適用可能な規則が可能な限り適用されていることとして定義したが, この定義は正確ではない。なぜなら, 古典論理のタブローとは異なり, 冠頭タブローではいつまで経っても枝が完成しない上に閉じないということが起こりうるからである。例えば, 次のような例がある。

例 4.1 $\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ が K4 において妥当であるかどうかを確かめるために, $\neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ の K4 における冠頭タブローをつくろうとすると, 次のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
1 : \neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi) & \qquad & 1,1,1 : \neg\Box\varphi \\
| & & | \\
1 : \Diamond\varphi & & 1,1,1,1 : \neg\varphi \\
1 : \neg\Diamond\Box\varphi & & | \\
| & & 1,1,1,1 : \neg\Box\varphi \\
1,1 : \varphi & & | \\
| & & 1,1,1,1,1 : \neg\varphi \\
1,1 : \neg\Box\varphi & & | \\
| & & \vdots \\
1,1,1 : \neg\varphi & &
\end{array}
$$

このように, $1 : \neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ の冠頭タブローは閉じることのない無限に長い枝をもつ。

そこで, Hintikka 集合と呼ばれる特殊な集合を用いて, 冠頭タブローの枝が完成するということを再定義する。

冠頭論理式の集合 S が **Hintikka** 集合であるとは, 次の条件を満たすことを言う。

(1) 任意の原子論理式 p に対して, $p \in S$ かつ $\neg p \in S$ とはならない。
(2) $\sigma : \alpha \in S$ ならば $\sigma : \alpha_1 \in S$ かつ $\sigma : \alpha_2 \in S$;
(3) $\sigma : \beta \in S$ ならば $\sigma : \beta_1 \in S$ または $\sigma : \beta_2 \in S$;
(4) $\sigma : \neg\neg\varphi \in S$ ならば $\varphi \in S$;
(5) $L \in \{K, T, 4, 5, B\}$ とする。$\tau_1 : \nu \in S$ ならば, $\tau_1 \rhd_L \tau_2$ かつ $\tau_2 \in \mathrm{pre}(S)$ を満たすような任意の τ_2 に対して $\tau_2 : \nu_0 \in S$;[8]
(6) $\sigma : \pi \in S$ ならば, ある $(\sigma.n)$ に対して $\sigma.n : \pi_0 \in S$.

このとき, 冠頭タブローの枝が完成するとは, その枝に現われる全ての冠頭論理式が Hintikka 集合に含まれることを言う。Hintikka 集合は冠頭論理式に冠頭タブローの規則を適用することで構成されていくが, それは有限集合である必要はない。そこで, 無限に多くの要素をもつ Hintikka 集合を考えれば, 規則を可能な限り全て適用し続けるという操作の極限を特定することができるので, その極限を用いて冠頭タブローの枝の「完成」を定義している。

Hintikka 集合は次の重要な性質をもつ。

補題 4.2 (Hintikka の補題) Hintikka 集合 S に含まれる全ての冠頭論理式は充足可能である。

証明　それぞれの冠頭論理式に含まれる論理結合子の数に関する帰納法によって示す。まず, 任意の原子論理式 p に対して, $\sigma : p \in S$ ならば真, $\sigma : p \notin S$ ならば偽となるように $I(\sigma)$ における p の付値 $V(p, I(\sigma))$ を定めれば, S に含まれる任意の原子論理式は充足可能になる。よって, 論理結合子が 0 個の場合については示された。次に, Hintikka 集合の定義から $\alpha \in S$ ならば $\alpha_1 \in S$ かつ $\alpha_2 \in S$ となるので, 帰納法の仮定から α_1 と α_2 は共に充足可能である。よって, 充足可能関係 $\models$ の定義から, α も充足可能になる。同様にして, $\beta, \neg\neg\varphi, \nu, \pi$ の場合も示すことができる。

冠頭タブローの枝が充足可能であるとは, その枝に現われる全ての冠頭論理式が充足可能であることを言い, 冠頭タブローが充足可能であるとは, その冠頭タブローのある枝が充足可能であることを言う。冠頭タブローの開いた枝 θ は完成しているので, θ に現われる全ての冠頭論理式は Hintikka 集合に含まれ, Hintikka の補題から Hintikka 集合に含まれる全ての冠頭論理式は充足可能であることが分かるので, θ は充足可能である。このことを用いれば, 冠頭タブローの完全性を示すことができる。

定理 4.3 (冠頭タブローの完全性) $1 : \varphi$ が妥当ならば φ の冠頭タブローによる証明が存在する。

証明 長くなるので割愛する。詳しく知りたい読者は Fitting (1983) の Theorem 6.2 を参照せよ。

5 反例モデルの構成

定理 4.3 の対偶をとれば,

$$1 : \neg\varphi \text{の完成した冠頭タブローが閉じていないならば} 1 : \neg\varphi \text{は充足可能}$$

となる。[9] このとき, 完成した冠頭タブローはある開いた枝をもつので,

$$1 : \neg\varphi \text{の完成した冠頭タブローのある枝が開くならば} 1 : \neg\varphi \text{は充足可能}$$

と言い換えることができる。では, 具体的に $1 : \neg\varphi$ を充足可能にするような Kripke モデル $M = (W, R, V)$, すなわち φ の反例モデルはどのようなものなのだろうか。θ に有限個の冠頭論理式 $\sigma_1 : \varphi_1, \ldots, \sigma_n : \varphi_n$ のみが現われる場合には, 単に $V(\varphi_1, I(\sigma_1)), \ldots, V(\varphi_n, I(\sigma_n))$ のそれぞれが真になるように V を定めればよい。問題は, θ に現われる冠頭論理式の個数が無限個の場合である。例えば, $1 : \neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ の冠頭タブロー (例 4.1) について考えてみよう。この冠頭タブローの冠頭部 σ と, σ を冠頭部にもつ論理式の対応を表にまとめると次のようになる。

冠頭部	論理式
1	$\neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi), \Diamond\varphi, \neg\Diamond\Box\varphi$
$1,1$	$\varphi, \neg\Box\varphi$
$1,1,1$	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
$1,1,1,1$	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
$\vdots$	$\vdots$

この場合, ある枝 θ に現われる冠頭部が σ の全ての論理式からなる集合を S_σ とすると, $S_{1,1,1} = S_{1,1,1,1} = S_{1,1,1,1,1} = \cdots$ となる。そこで, W を $\{I(1), I(1,1), I(1,1,1), \ldots\}$, R を推移的な到達可能関係, V をある原子論理式 p に対して,

$$V(p, I(1)), V(p, I(1,1)), V(\neg p, I(1,1,1)), V(\neg p, I(1,1,1,1)), \ldots$$

の全てが真になるように V を定めればよい。この反例モデル $M = (W, R, V)$ を図示すると次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
\underset{\substack{I(1)\\ p}}{\bullet} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & \underset{\substack{I(1,1)\\ p}}{\bullet} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \underset{\substack{I(1,1,1)\\ \neg p}}{\bullet} \arrow[r] & \underset{\substack{I(1,1,1,1)\\ \neg p}}{\bullet} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

実際に, $(M, I(1,1)) \models p$ であることから $(M, I(1)) \models \Diamond p$ となる上に, $(M, I(1,1,1)) \models \neg p$, $(M, I(1,1,1,1)) \models \neg p, \ldots$ であることから

$$(M, I(1,1)) \not\models \Box p,\ (M, I(1,1,1)) \not\models \Box p,\ (M, I(1,1,1,1)) \not\models \Box p, \ldots$$

となるので, $(M, I(1)) \not\models \Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ となっていることを確認できる。つまり, 冠頭部の違いを除いて一致する無限個の冠頭論理式が現われるというパターンを利用することによって反例モデルを構成することができた。

しかし, この反例モデルは有限モデルではない。[10] そこで,

$$\begin{tikzcd}
\underset{\substack{I(1)\\ p}}{\bullet} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \underset{\substack{I(1,1)\\ p}}{\bullet} \arrow[r] & \underset{\substack{I(1,1,1)\\ \neg p}}{\bullet} \arrow[loop above]
\end{tikzcd}$$

としてみよう。実は, これは $\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ の有限反例モデルになっている。

このような「冠頭部の違いを除いて一致する無限個の冠頭論理式が現われる部分に反射性を仮定する」という方法は, より複雑な例においても有効である。

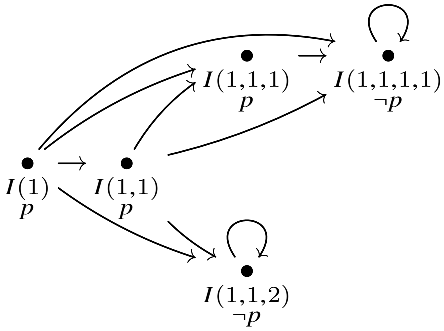
例 5.1 $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ が K4 において妥当であるかどうかを確かめるために, $\neg(\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ の K4 における冠頭タブローをつくろうとすると, 次のようになる。

$$
\begin{array}{c}
1 : \neg(\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi) \\
| \\
1 : \Diamond\Diamond\varphi \\
1 : \neg\Diamond\Box\varphi \\
| \\
1,1 : \Diamond\varphi \\
| \\
1,1,1 : \varphi \\
| \\
1,1 : \neg\Box\varphi \\
| \\
1,1,2 : \neg\varphi
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1,1,1 : \neg\Box\varphi \\
| \\
1,1,1,1 : \neg\varphi \\
| \\
1,1,2 : \neg\Box\varphi \\
| \\
1,1,2,1 : \neg\varphi \\
| \\
1,1,1,1 : \neg\Box\varphi \\
| \\
1,1,1,1,1 : \neg\varphi \\
| \\
1,1,2,1 : \neg\Box\varphi \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

この冠頭タブローの冠頭部 σ と, σ を冠頭部にもつ論理式の対応を表にまとめると次のようになる。

冠頭部	論理式
1	$\neg(\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi), \Diamond\Diamond\varphi, \neg\Diamond\Box\varphi$
1,1	$\Diamond\varphi, \neg\Box\varphi$
1,1,1	$\varphi, \neg\Box\varphi$
1,1,2	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
1,1,1,1	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
1,1,2,1	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
1,1,1,1,1	$\neg\varphi, \neg\Box\varphi$
⋮	⋮

そこで, 次のようなモデルを構成する。



これは有限反例モデルになっている。

以上のように, 「冠頭部の違いを除いて一致する無限個の冠頭論理式が現われる部分に反射性を仮定する」ことで K4 における冠頭タブローの長さを有限にしつつ反例モデルを構成する手順は, 実は濾過法 **(filtration method)** と呼ばれる手法の特殊例であるということを §6 で示す。[11]

6　濾過法による有限反例モデルの構成

Σ を φ の部分論理式全体からなる集合とする。$w_1 \in W$ と $w_2 \in W$ の間の同値関係 $\sim$ を任意の $\psi \in \Sigma$ に対して

$$(M, w_1) \models \psi \Leftrightarrow (M, w_2) \models \psi$$

となるように定め, 代表元 $w \in W$ によって生成される $\sim$ の同値類を $[w]$, $\sim$ の同値類全体からなる集合を $W/\sim$ と書くことにする。Kripke モデル $M = (W, R, V)$ の濾過 **(filtration)** とは, 次の条件を満たすような Kripke モデル $(W/\sim, S, V^{+}_{[w]})$ のことを言う。

(1) 任意の原子論理式 $p \in \Sigma$ に対して, $V(p, w)$ が真になるような $w \in W$ の集合は, 集合 $\{[v] : V^{+}_{[w]}(p, v)$は真$\}$ と一致する;
(2) 任意の $w_1, w_2 \in W$ に対して, $w_1 R w_2$ ならば $[w_1]S[w_2]$;
(3) 任意の $w_1, w_2 \in W$ および $\Box\psi \in \Sigma$ に対して, $(M, w_1) \models \Box\psi$ かつ $[w_1]S[w_2]$ ならば $(M, w_2) \models \psi$.

φ の部分論理式の個数を n とすると, その n 個の部分論理式の内のどれが真でそれが偽かということによって任意の同値類 $[w]$ は定まるので, $W/\sim$ の要素の個数は 2^n 個, つまり有限個である。よって, $(W/\sim, S, V^{+}_{[w]})$ は有限モデルになっている。

濾過の条件 (2) から $w_1 R w_2$ ならば $[w_1]S[w_2]$ となるが, $[w_1]S[w_2]$ ならば $w_1 R w_2$ となるとは限らない。よって, 濾過は元のモデルの完全なコピーではない。例えば,

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ w_1 & & w_2 \\ (\Box p) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ w_1' & & w_2' \\ (\Box p) & & p \end{array}$$

というモデルを考えてみよう。ただし, $w_1 \sim w_1'$ かつ $w_2 \sim w_2'$ とする。このモデ

ルでは, $w_1 R w_2$ ではないが, $w_1' R w_2'$ なので, 濾過の条件 (2) から $[w_1]S[w_2]$ となる。さらに, $(M, w_1) \models \Box p$ なので, 濾過の条件 (3) から $(M, w_2) \models p$ となる。つまり, $w_1 R w_2$ ではないのに, あたかも $w_1 R w_2$ であるかのように w_2 における付値が決定されるのである。

また, 濾過の定義から, 最も小さな $S \subset (W/\sim) \times (W/\sim)$ は

$$\underline{S} = \{([w_1], [w_2]) : \text{ある}w_1', w_2' \in W\text{が存在して}w_1 \sim w_1', w_2 \sim w_2', w_1' R w_2'\},$$

最も大きな $S \subset (W/\sim) \times (W/\sim)$ は

$$\overline{S} = \{([w_1], [w_2]) : \text{任意の}\Box\psi \in \Sigma\text{に対して}(M, w_1) \models \Box\psi\text{ならば}(M, w_2) \models \psi\}$$

となるということに注意せよ。このとき, $(W/\sim, \underline{S}, V^+_{[w]})$ を最も細かい **(finest)** 濾過, $(W/\sim, \overline{S}, V^+_{[w]})$ を最も粗い **(coarsest)** 濾過と言う。

$M = (W, R, V)$ が φ の無限反例モデルならば, M の濾過 $(W/\sim, S, V^+_{[w]})$ は φ の有限反例モデルになっていることは, 次の定理から分かる。

定理 6.1　Σ を φ の部分論理式全体からなる集合, $M' = (W/\sim, S, V^+_{[w]})$ を M の濾過とする。任意の $w \in W$ および $\psi \in \Sigma$ に対して

$$(M, w) \models \psi \Leftrightarrow (M', [w]) \models \psi$$

となる。

証明　ψ に含まれる論理結合子の数に関する数学的帰納法によって示す。まず, 論理結合子の数が 0 個の場合は, 濾過の条件 (3) から従う。次に, 論理結合子の数が k 個に成り立つと仮定して $k+1$ 個の場合にも成り立つことを示す。新たに付け加えられる論理結合子が $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ の場合は, 同値関係 $\sim$ の定義から従う。そこで, 新たに付け加えられる論理結合子が $\Box$ の場合, つまり $\psi = \Box\chi$ となる場合を示す。

($\Rightarrow$) $(M, w_1) \models \Box\chi$ を仮定する。$[w_1]S[w_2]$ ならば, 濾過の条件 (3) から $(M, w_2) \models \chi$ となるので, 帰納法の仮定から $(M', [w_2]) \models \chi$ となる。よって, $[w_1]S[w_2]$ であることから $(M', [w_1]) \models \Box\chi$ を得る。

($\Leftarrow$) $(M', [w_1]) \models \Box\chi$ を仮定する。$w_1 R w_2$ となるような w_2 を任意に選べば, 濾過の条件 (2) から $[w_1] S [w_2]$ となるので, $(M', [w_2]) \models \chi$ を得る。よって, 帰納法の仮定から $(M, w_2) \models \chi$ となるので, $w_1 R w_2$ であることから $(M, w_1) \models \Box\chi$ を得る。

一般に, R が推移的ならば S も推移的になるとは限らない。なぜなら, 仮に $[w_1] S [w_2]$ かつ $[w_2] S [w_3]$ となったとしても, $[w_1] S [w_3]$ となるとは限らないからである。そこで, 推移的な R からなる $M = (W, R, V)$ の濾過を得るために,

$$\widehat{\underline{S}} = \{([w_1], [w_2]) : \text{ある}n\text{が存在して}([w_1], [w_2]) \in \underline{S}^n\}$$

という特殊な S を用いることにする。ただし, $\underline{S}^n$ は n 個の $\underline{S}$ の合成とする。このとき, $M' = (W/\!\sim, \widehat{\underline{S}}, V^+_{[w]})$ が濾過であることはつぎのようにして確かめられる。まず, 濾過の条件 (2) については R が推移的であることから示される。次に, 濾過の条件 (3) を示す。$(M, w_1) \models \Box\psi$ かつ $[w_1] \widehat{\underline{S}} [w_2]$ ならば, $\widehat{\underline{S}}$ の定義から有限列 $[w_{1.1}], [w_{1.2}], [w_{1.3}], \ldots, [w_{1.n}]$ が存在して

$$[w_1] \underline{S} [w_{1.1}], [w_{1.1}] \underline{S} [w_{1.2}], \ldots, [w_{1.(n-1)}] \underline{S} [w_{1.n}]$$

となるので, $\underline{S}$ の定義から, ある $w'_1, w'_{1.1} \in W$ が存在して $w'_1 \sim w_1, w'_{1.1} \sim w_{1.1}, w'_1 R w'_{1.1}$ となる。R が推移的であることから, $(M, w'_{1.1}) \models \psi \wedge \Box\psi$ となるので, $(M, w_{1.1}) \models \psi \wedge \Box\psi$ を得る。同様の議論を $w_{1.2}, w_{1.3}, \ldots$ に対して繰り返すことによって, 最終的には $(M, w_2) \models \psi \wedge \Box\psi$ となるので, $(M, w_2) \models \psi$ を得る。

このようにして, 推移的な R からなる $M = (W, R, V)$ の濾過が得られた。そこで, $M = (W, R, V)$ を K4 における冠頭タブローから分かる非有限反例モデルとすれば, M の濾過 $M' = (W/\!\sim, \widehat{\underline{S}}, V^+_{[w]})$ は有限反例モデルになる。特に, M' が濾過の条件 (3) を満たしていることを確かめる過程で, $(M, w_1) \models \Box\psi$ かつ $[w_1] \widehat{\underline{S}} [w_2]$ ならば $(M, w_2) \models \psi \wedge \Box\psi$ となることを示しているので, §5 で提示した「冠頭部の違いを除いて一致する無限個の冠頭論理式が現われる部分に反射性を仮定する」というアイディアが実現されている。なぜなら, $(M, w_2) \models \psi \wedge \Box\psi$ となるということは, $(M, w_2) \models \Box\psi \to \psi$ となるということで

あり, 従って w_2 において反射性が成り立つからである。ただし, その逆は成り立たない。

以上の内容を例 4.1 の場合について具体的にみてみよう。まず, $1 : \neg(\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi)$ の K4 における冠頭タブローから分かる非有限反例モデルとして,

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\bullet}{\underset{p}{I(1)}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & \overset{\bullet}{\underset{p}{I(1,1)}} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \overset{\bullet}{\underset{\neg p}{I(1,1,1)}} \arrow[r] & \overset{\bullet}{\underset{\neg p}{I(1,1,1,1)}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

という反例モデル $M = (W, R, V)$ が得られる。このとき, $I(1,1,1,1), I(1,1,1,1,1), \cdots \in [I(1,1,1)]$ であることから, M の濾過 $M' = (W/{\sim}, \underline{\widehat{S}}, V^{+}_{[w]})$ を図示すると次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\bullet}{\underset{p}{[I(1)]}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \overset{\bullet}{\underset{p}{[I(1,1)]}} \arrow[r] & \overset{\bullet}{\underset{\neg p}{[I(1,1,1)]}} \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

従って, K4 における冠頭タブローの長さを有限にしつつ反例モデルを構成するという操作は $\underline{\widehat{S}}$ を用いた濾過に相当することが分かった。このように, 無限に長い冠頭タブローは, 濾過法の分かりやすい応用先を提供すると同時に濾過法の有効性を私たちに教えてくれる。

謝辞

本研究を遂行するにあたって, 若い研究者のための快適で活発な議論の場「あかでみあ」を提供してくださった齋藤曉さんに, 心より感謝申し上げます。

注

[1] より詳細なタブロー法の歴史に興味のある読者は Fitting (1999) を参照せよ。

[2] 特に, Fitting (1983); 神野・内井 (1976); 菅原 (1987) には様相論理のタブロー法に関する記述もある。

[3] 本稿にある例 4.1 や例 5.1 など。

[4] 従って, 冠頭タブローでは規則を適用する前後の冠頭論理式が離れた位置に現われることがあるので, この点においては自然演繹と同じような特徴をもっている。Hilbert 流やシークエント計算のように, 遠隔的な (推論) 規則を許さないようにするためには, 規則を適用するたびに, その

規則による論理式の変化の履歴を残すようなタブローをつくればよい。このようなタブローはブロックタブロー (Smullyan (1995)) として知られている。

[5] この定義によれば, 無限に長い枝をもつ冠頭タブローは永久に完成しないということになる。しかし, それでは不便なので, 後により扱いやすいような定義に改善する。

[6] π 規則には特に手を加える必要はない。

[7] R が同値関係であれば, $w \in W$ から任意の $w' \in W$ に到達可能であるということを思い出そう。

[8] 記号 $\rhd$ は §3 で既に定義している。

[9] もしも $1 : \neg\varphi$ の冠頭タブローが完成していなければ, その時点で閉じていないからといって, φ の冠頭タブローによる証明が存在しないと言い切ることはできない。

[10] 単に反例モデルが存在するかどうかだけでなく, 有限反例モデルが存在するかどうかを調べることは, 論理の決定可能性を調べる上で重要である。詳しくは Goldblatt (1992) の §4 などを参照せよ。

[11] 濾過法については, Goldblatt (1992) の §4 や Chagrov (1997) の §5.3 などを参照せよ。特に, 本稿を執筆するにあたり, 後者を大いに参考にさせてもらった。

参考文献

Beth, Evert Willem (1955) *Semantic entailment and formal derivability.*, Mededeelingen der Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde ; nieuwe reeks, d. 18, no. 13: Noord-Hollandsche Uitg. Mij.

Chagrov, Alexander (1997) *Modal logic*, Oxford logic guides ; 35: Clarendon Press ; Oxford University Press.

d'Agostino, Marcello (1999) "Tableau methods for classical propositional logic," in *Handbook of tableau methods*: Springer, pp. 45–123.

Fitting, Melvin (1972) "Tableau methods of proof for modal logics," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 13, No. 2, pp. 237–247.

——— (1983) *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*: Reidel.

——— (1996) *First-order logic and automated theorem proving*, Graduate texts in computer science (Springer-Verlag New York Inc.): Springer, 2nd edition.

——— (1999) "Introduction," in *Handbook of tableau methods*: Springer, pp. 1–43.

Goldblatt, Robert (1992) *Logics of time and computation*, CSLI lecture notes ; no. 7: Center for the Study of Language and Information, 2nd edition.

Hintikka, Jaakko (1953) *A new approach to sentential logic*: Societas scientiarum Fennica.

——— (1955) *Two papers on symbolic logic : form and content in quantification theory and reductions in the theory of types*, Acta philosophica Fennica ; fasc. 8: Acta philosophica fennica.

Priest, Graham (2008) *An introduction to non-classical logic*: Cambridge University Press, 2nd edition.

Smullyan, Raymond R (1995) *First-order logic*: Dover.

神野慧一郎・内井惣七 (1976) 『論理学:モデル理論と歴史的背景』，ミネルヴァ書房.

斎藤哲郎 (1964) 『記号論理学』，理想社.

菅原道明 (1987) 『論理学:タブローの方法』，理想社.

丹治信春 (1999) 『タブローの方法による論理学』，朝倉書店.

戸田山和久 (2000) 『論理学をつくる』，名古屋大学出版会.

リチャードジェフリー (1995) 『形式論理学 :その展望と限界』，戸田山和久訳, 産業図書.